УДК 519.21+517.37

О. М. Кінаш, М. І. Пароля, М. М. Шеремета

Зростання характеристичних функцій ймовірнісних законів

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Для аналітичних у крузі характеристичних функцій ймовірнісних законів у термінах узагальнених порядків встановлено зв'язок між зростанням максимуму модуля і спаданням суми "хвостів" ймовірнісного закону.

Неспадна неперервна зліва на $(-\infty, +\infty)$ функція F називається [1, с. 10] ймовірнісним законом, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} F(-x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, а характеристичною функцією закону F називається [1, с. 12] функція

$$\varphi(z) = \varphi(z; F) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x), \qquad z \in (-\infty, +\infty). \tag{1}$$

Якщо функція φ допускає аналітичне продовження на круг $\mathbb{D}_R = \{z\colon |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, то вона називається аналітичною в $\mathbb{D}_R$. Надалі вважатимемо, що $\mathbb{D}_R$ є найбільшим кругом аналітичності функції φ. Відомо [1, с. 37–38], що для того щоб характеристична функція φ була аналітичною в $\mathbb{D}_R$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $r \in [0, R)$

$$W_F(x) =\colon 1 - F(x) + F(-x) = O(e^{-rx}), \qquad x \to +\infty. \tag{2}$$

Якщо $R = +\infty$ (тобто φ — ціла характеристична функція) і $\varphi(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то [1, с. 45] існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{-1} \ln M(r, \varphi) > 0$, де $M(r, \varphi) = \max\{|\varphi(z)|\colon |z| = r\}$. Тому якщо $\rho[\varphi] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} (\ln\ln M(r, \varphi)/\ln r)$ — порядок функції φ і $\sigma[\varphi] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} (\ln M(r, \varphi)/r^{\rho[\varphi]})$ — її тип, визначений за умови $0 < \rho[\varphi] < +\infty$, то або $\rho[\varphi] > 1$, або $\rho[\varphi] = 1$ і $\sigma[\varphi] > 0$. Б. Рамачандран [2] (див. також [1, с. 54]) показав, що за умови $1 \leqslant \rho[\varphi] < +\infty$ правильна формула

$$\frac{1}{\rho[\varphi]} + \frac{1}{\gamma[F]} = 1, \qquad \gamma[F] = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln(1/W_F(x))}{\ln x}, \tag{3}$$

а за умови $1 < \rho[\varphi] < +\infty$

$$(\gamma[F]\delta[F])^{\rho[\varphi]-1}\sigma[\varphi]\rho[\varphi] = 1, \qquad \delta[F] = \varliminf_{x\to+\infty} x^{-\gamma[F]} \ln\frac{1}{W_F(x)}. \tag{4}$$

Н. І. Яковлєва [3, 4] узагальнила формулу (3), використовуючи узагальнені порядки [5]. Як і в [5], через L позначимо клас неперервних додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) \equiv \alpha(x_0) > 0$ для $x \leqslant x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \leqslant x \to +\infty$. Будемо говорити, що

$\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = ((1+o(1)))\alpha(x)$ $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0,+\infty)$, тобто α — повільно зростаюча функція. В [4] доведено, що якщо $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L^0$, то для того щоб $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{1}{\beta(r)}\alpha\left(\dfrac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right) = \gamma > 0$, необхідно і достатньо, щоб $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{1}{\alpha(x)}\beta\left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{W_F(x)}\right) = \dfrac{1}{\gamma}$.

Оскільки універсальної шкали зростання побудувати не можна, Б. В. Винницький [6] встановив зв'язок між зростанням $M(r,\varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ для цілих функцій у термінах функції $\Phi^{-1}(x)$, оберненої до функції $\Phi(x) = \ln M(e^x,\varphi)$. Він показав, що якщо φ має нескінченний порядок, то $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\Phi^{-1}(x)}{\ln((1/x)\ln(1/W_F(x)))} = 1$. М. Девес [7] замість функцій з класів L^0 і $L_{\text{пз}}$ розглядала функції α і β такі, що $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\alpha(kx)}{\alpha(x)} \leqslant A_0k^a$ і $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\beta(kx)}{\beta(x)} \leqslant B_0k^b$ для $k > 1$, де a, b, A_0, B_0 — додатні сталі і, зрозуміло, замість рівностей отримала оцінки $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{1}{\beta(r)}\alpha\left(\dfrac{\ln M(r,\varphi)}{r}\right)$ зверху і знизу через $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta((1/x)\ln(1/W_F(x)))}$.

Для аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D}_1$ функції φ порядок і тип вводяться за формулами $\rho^*[\varphi] = \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}} \dfrac{\ln^+\ln^+ M(r,\varphi)}{-\ln(1-r)}$ і $\sigma^*[\varphi] = \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}}(1-r)^{\rho^*[\varphi]}\ln^+ M(r,\varphi)$ за умови $0 < \rho^*[\varphi] < +\infty$. В. М. Сороківський [8] довів, що якщо φ — аналітична в $\mathbb{D}_1$ характеристична функція ймовірнісного закону F, то

$$\frac{1}{\gamma^*[F]} - \frac{1}{\rho^*[F]} = 1, \qquad \gamma^*[F] = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln^+\left(1 - \ln\dfrac{1}{W_F(x)}\right)}{\ln x}, \tag{5}$$

і

$$(\gamma^*[F]\delta^*[F])^{\rho^*[\varphi]+1} = \sigma^*[\varphi]\rho^*[\varphi], \qquad \delta^*[F] = \overline{\lim_{x+\to\infty}} x^{-\gamma^*[F]}\left(x - \ln\frac{1}{W_F(x)}\right)^+. \tag{6}$$

В [9] він показав, що якщо $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L_{\text{пз}}$ такі, що $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{d\ln\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x} < 1$, $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{\alpha(x\alpha^{-1}(c\beta(x)))}{\beta(x)} = c$ і $\beta^{-1}\left(c\alpha\left(\dfrac{x}{\beta^{-1}(c\alpha(x))}\right)\right) = (1+o(1))\beta^{-1}(c\alpha(x))$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0;+\infty)$, то

$$\overline{\lim_{r\uparrow 1}} \frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{\beta\left(\dfrac{1}{1-r}\right)} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\left(1\Big/\left(1 - \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{W_F(x)}\right)\right)^+\right)}. \tag{7}$$

Тут ми доповнимо та узагальнимо вищенаведені результати. Для цілих характеристичних функцій правильна така теорема.

Теорема 1. *Якщо або $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{пз}}$, а φ — ціла характеристична функція ймовірнісного закону F, то*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\alpha\left(\dfrac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(r)} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{W_F(x)}\right)}. \tag{8}$$

За умов $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L^0$ теорема 1 збігається з наведеним вище результатом Н. І. Яковлєвої [4], який вказує на зв'язок між зростанням $M(r,\varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ у випадку, коли $(1/r)\ln M(r,\varphi)$ прямує до $+\infty$ досить швидко. За умов $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{пз}}$ теорема 1 є новим результатом і вказує на такий зв'язок, коли $(1/r)\ln M(r,\varphi)$ прямує до $+\infty$ повільно. Якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$, для $x \geqslant x_0$, то з (8) отримаємо формулу (3) для знаходження порядку.

Для знаходження типу цілої характеристичної функції ймовірнісного закону F правильна така рівність:

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r,\varphi)}{r^\rho} = \frac{\rho-1}{\rho^\rho} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{W_F(x)}\right)^{\rho-1}}, \qquad \rho = \rho[\varphi],$$

з якої випливає формула (4). У випадку, коли характеристична функція φ ймовірнісного закону F аналітична у крузі $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, ситуація дещо інша, бо φ може бути обмеженою в $\mathbb{D}_R$, а для того щоб $M(r,\varphi) \uparrow +\infty$ при $r \uparrow R$, достатньо, щоб

$$\varlimsup_{r\uparrow R} W_F(x)e^{Rx} = +\infty. \tag{9}$$

Швидкість зростання функції $M(r,\varphi)$ залежить від асимптотичного поводження функції $W_F(x)e^{Rx}$, на що вказує нижченаведена теорема.

Теорема 2. *Нехай φ — аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F, який задовольняє умову* (9), *а $\rho^*[\varphi]$ — її порядок. Тоді*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln^+\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}{\ln x} = \frac{\rho^*[\varphi]}{\rho^*[\varphi]+1} \qquad і \qquad \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln \frac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}} = \rho^*[\varphi],$$

а якщо $0 < \rho^*[\varphi] < +\infty$, то для типу $\sigma^*[\varphi]$ правильні формули

$$\sigma^*[\varphi] = \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{(\ln^+(W_F(x)e^{Rx}))^{\rho+1}}{x^\rho} = \frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^\rho} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(\dfrac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)^{\rho+1}},$$

де $\rho = \rho^*[\varphi]$.

Для $R = 1$ формули з теореми 2 збігаються з формулами (5) і (6). Доцільність наведення формули для знаходження $\rho^*[\varphi]$ і $\sigma^*[\varphi]$ в теоремі 2 у двох варіантах видно з таких трьох теорем.

Теорема 3. *Нехай функції $\alpha \in L_{\text{пз}}$ і $\beta \in L_{\text{пз}}$ такі, що $(\beta^{-1}(c\alpha(x)))/x \to 0$ і $\alpha(x/(\beta^{-1}(c\alpha(x)))) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного $c \in (0,+\infty)$, а φ — аналітична в $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F, який задовольняє умову* (9). *Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{\beta\left(\dfrac{1}{R-r}\right)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\dfrac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)}. \tag{10}$$

Зауважимо, що для $R = 1$ формула (10) збігається з формулою (7), але умови на α і β слабші, ніж у [9].

Теорема 4. *Нехай функції* $\alpha \in L_{\text{пз}}$ *і* $\beta \in L_{\text{пз}}$ *такі, що* $\alpha(\ln x)/\beta(x) \to 0$, $\alpha^{-1}(c\beta(x))/x \to \to 0$ *і* $\beta(x/(\alpha^{-1}(c\beta(x))) = (1+o(1))\beta(x)$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$, *а* φ — *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* F, *який задовольняє умову* (9). *Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\alpha(\ln M(r,\varphi))}{\beta\left(\dfrac{1}{R-r}\right)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\ln^+(W_F(x)e^{Rx}))}{\beta(x)}.$$

Зауважимо, що умови на α і β в теоремі 3 вказують на те, що функція α зростає повільніше, ніж функція β, а з умов теореми 4 випливає, що функція β зростає повільніше, ніж функція α. Цікавим є випадок коли функції α і β мають однакове зростання, наприклад коли $\alpha(x) \equiv \beta(x)$. Правильна така теорема.

Теорема 5. *Нехай функція* $\alpha \in L_{\text{пз}}$ *така, що* $\alpha(\ln x)/\alpha(x) \to 0$ *і* $\alpha(x/(\alpha^{-1}(c\alpha(x)))) = = (1+o(1))\alpha(x)$ *при* $x \to +\infty$ *для будь-якого* $c \in (0,1)$, *а* φ — *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < < R < \infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* F, *який задовольняє умову* (9). *Нехай* $\rho^*_\alpha[\varphi] = \varlimsup_{r\uparrow R} \alpha(\ln M(r,\varphi))/\alpha(1/(R-r))$. *Тоді якщо* $\rho_\alpha[\varphi] \geqslant 1$, *то* $\rho^*_\alpha[\varphi] = = \varlimsup_{x\to+\infty} \alpha(x) \Big/ \alpha\left(\dfrac{x}{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}\right)$, *а якщо* $\rho^*_\alpha[\varphi] < 1$, *то* $\rho^*_\alpha[\varphi] = \varlimsup_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln(W_F(x)e^{Rx}))}{\alpha(x)}$.

У теоремах 3, 4 функції α і β є повільно зростаючими. Проте можна отримати аналоги цих теорем, коли одна з цих функцій є степеневою. На це вказують нижченаведені теореми.

Теорема 6. *Нехай* $\alpha \in L_{\text{пз}}$ *і* $\alpha(x/\alpha(x)) = (1+o(1))\alpha(x)$ *при* $x \to +\infty$, *а* φ — *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* F, *який задовольняє умову* (9). *Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} (R-r)\alpha(\ln M(r,\varphi)) = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x} \ln^+(W_F(x)e^{Rx}).$$

Теорема 7. *Нехай* $\beta \in L_{\text{пз}}$, $(\ln x)/\beta(x) \to 0$ *і* $\beta(x/\beta(x)) = (1+o(1))\beta(x)$ *при* $x \to +\infty$, *а* φ — *аналітична в* $\mathbb{D}_R$, $0 < R < +\infty$, *характеристична функція ймовірнісного закону* F, *який задовольняє умову* (9). *Тоді*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\ln M(r,\varphi)}{\beta\left(\dfrac{1}{R-r}\right)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln^+(W_F(x)e^{Rx})}{\beta(x)}.$$

Зауважимо, що в теоремах 4 і 7 усунути умову $\alpha(\ln x)/\beta(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ не можна. Покажемо це на прикладі теореми 7 з $\beta(x) = \ln x$. Нехай $F(x) = 0$ для $x \leqslant 0$, $F(x) = 1 - e^{-R}$ для $0 < x \leqslant 1$, і $F(x) = 1 - xe^{-Rx}$ для $x \geqslant 1$. Тоді $\varphi(t) = 1 - e^{-R} + + \int_1^\infty e^{itx} dF(x)$ і $M(r,\varphi) = |\varphi(-ir)| = 1 - e^{-R} + e^{-(R-r)} + \dfrac{re^{-(R-r)}}{(R-r)^2}(1+R-r) = \dfrac{(1+o(1))R}{(R-r)^2}$, при $r \uparrow R$, тобто $\varlimsup_{r\uparrow R} \dfrac{\ln M(r,\varphi)}{\beta(1/(R-r))} = 2$. З іншого боку, $W_F(x) = xe^{-Rx}$ для $x \geqslant 1$, і, отже, $\varlimsup_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(W_F(x)e^{Rx})}{\beta(x)} = 1$.

1. *Линник Ю. В., Островский Н. В.* Разложение случайных величин и векторов. – Москва: Наука, 1972. – 479 с.

2. *Ramachandran B.* On the order and the type of entire characteristic functions // Ann. Math. – 1962. – **33**, No 4. – P. 1238–1255.
3. *Яковлева Н. И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1971. – Вып. 15. – С. 43–49.
4. *Яковлева Н. И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов // Вопросы мат. физики и функц. анализа. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 43–54.
5. *Шеремета М.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100–108.
6. *Винницкий Б. В.* Об одном свойстве целых характеристических функций вероятностных законов // Там же. – 1975. – № 4. – С. 95–97.
7. *Dewess M.* The tail behaviour of a distribution function and its connection to the growth of its entire characteristic function // Math. Nachr. – 1978. – **81**. – P. 217–231.
8. *Сорокивский В. М.* О росте характеристических функций вероятностных законов // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 9. – С. 48–52.
9. *Сорокивский В. М.* Об обобщенных порядках роста аналитических характеристических функций вероятностных законов // Укр. мат. журн. – 1987. – **33**, № 1. – С. 115–118.

Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 03.11.2011

О. М. Кинаш, М. И. Пароля, М. Н. Шеремета

Возрастание характеристических функций вероятностных законов

Для аналитических в круге характеристических функций вероятностных законов в терминах обобщенных порядков установлена связь между возрастанием максимума модуля и убыванием суммы “хвостов” вероятностного закона.

O. M. Kinash, M. I. Parolya, M. M. Sheremeta

A growth of the characteristic functions of probability laws

For the characteristic functions, which are analytic in a disk, of probability laws in terms of generalized orders, the relation between the modulus maximum growth and the decrease of a sum of “tails” of a probability law is established.