УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, Х. М. Муньоз-Есколано, Н. А. Турбай

Спряжено-переставні підгрупи деяких нескінченних груп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Підгрупа H групи G називається спряжено-переставною, якщо $HH^g = H^gH$ для кожного елемента $g \in G$. Доведено субнормальність спряжено-переставних підгруп у деяких класах нескінченних груп, таких, наприклад, як черніковські або майже поліциклічні групи. Доведено, що в інших класах нескінченних груп, таких, наприклад, як майже розв'язні мінімаксні групи, кожна спряжено-переставна підгрупа є зростаючою. Також розглянуто структуру нескінченних груп, кожна циклічна підгрупа яких є спряжено-переставною.

Підгрупа H групи G називається *переставною в групі* G, якщо вона переставна з будь-якою підгрупою K групи G, тобто $HK = KH$. Переставні підгрупи є природним узагальненням нормальних підгруп. Вивчення властивостей таких підгруп почалося достатньо давно і виявилося досить плідним (див., наприклад, [1]). Зокрема, були описані групи (скінченні та нескінченні), в яких усі підгрупи переставні (див., наприклад, [1, 2.4]). У роботі [2] були розглянуті групи, що мають таку властивість: $HH^g = H^gH$ для кожного елемента $g \in G$. Пізніше такі підгрупи були названі спряжено-переставними в G [3]. У роботі [2] доведено, що кожна спряжено-переставна підгрупа скінченної групи є субнормальною. У роботі [3] цей результат був повторений. Т. Фогель [4] розглянув деякі властивості груп, усі циклічні підгрупи яких спряжено-переставні. У роботі [5] описані скінченні групи, в яких кожна спряжено-переставна підгрупа є переставною. Деякі властивості спряжено-переставних підгруп отримані в [6]. Зокрема, доведено, що якщо група G задовольняє умови максимальності та мінімальності, то кожна її спряжено-переставна підгрупа є субнормальною. Зауважимо, що для багатьох типів груп G той факт, що вона одночасно задовольняє обидві умови максимальності та мінімальності, призводить до скінченності G. Наприклад, це має місце для локально ступінчатих груп. Нагадаємо, що група G називається *локально ступінчатою*, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа містить власну підгрупу скінченного індексу. Для багатьох типів груп G той факт, що G задовольняє умову максимальності (відповідно мінімальності), означає, що G є майже поліциклічною (відповідно черніковською) групою. Тому природно виникає питання про спряжено-переставні підгрупи в черніковських та майже поліциклічних групах.

У даній роботі, зокрема, доведено, що спряжено-переставні підгрупи в черніковських та майже поліциклічних групах є субнормальними. Не можна стверджувати, що спряжено-переставні підгрупи будь-якої групи є субнормальними, оскільки існують приклади переставних підгруп, що не є субнормальними. Але кожна переставна підгрупа є зростаючою за відомою теоремою С. Стоунхевера ([7, теорема A]). Тому виникає природне питання: в яких класах нескінченних груп кожна спряжено-переставна підгрупа є зростаючою? Нами були знайдені деякі з таких класів.

Відзначимо спочатку такі властивості спряжено-переставних підгруп.

Твердження 1. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Якщо впорядкована за включенням множина*

$$\mathcal{M} = \{(g_1^{-1}Hg_1) \cdots (g_k^{-1}Hg_k) \mid g_1, \ldots, g_k \in G, k \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє умову максимальності, то $H^G \neq G$.

Виходячи від нормального замкнення підгрупи H, побудуємо *спадний ряд послідовних нормальних замкнень H в G*

$$H^G = H_0 \geqslant H_1 \geqslant \cdots \geqslant H_\alpha \geqslant H_{\alpha+1} \geqslant \cdots \geqslant H_\gamma$$

за таким правилом: $H_{\alpha+1} = {H_\alpha}^H$ для кожного $\alpha < \gamma$, $H_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} H_\mu$ для граничного порядкового числа λ. Останній член H_γ цього ряду називається *нижнім нормальним замкненням H в G*. Підгрупа H називається *спадною в G*, якщо H збігається зі своїм нижнім нормальним замкненням.

Теорема 1. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Якщо впорядкована за включенням множина*

$$\mathcal{M} = \{(g_1^{-1}Hg_1) \cdots (g_k^{-1}Hg_k) \mid g_1, \ldots, g_k \in G, k \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє умову максимальності, то H є спадною підгрупою G.

Наслідок 1. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Якщо G задовольняє умову максимальності, то H є спадною підгрупою G.*

Наслідок 2 [6]. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Якщо G одночасно задовольняє умову максимальності і мінімальності, то H є субнормальною підгрупою G.*

Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається *майже нормальною*, якщо множина $\{H^g \mid g \in G\}$ є скінченною. Це рівносильно тому, що індекс $|G : N_G(H)|$ є скінченним.

Наслідок 3. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Якщо H є майже нормальною в G, то H — субнормальна підгрупа G.*

Наслідок 4 [6]. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Якщо H має скінченний індекс в G, то H є субнормальною підгрупою G.*

Якщо G — група, то через $\mathrm{Tor}(G)$ позначатимемо максимальну нормальну періодичну підгрупу G. Зазначимо, що якщо G — локально нільпотентна група, то $\mathrm{Tor}(G)$ є її характеристичною підгрупою, більш того фактор-група $G/\mathrm{Tor}(G)$ не має скруту.

Нагадаємо, що абелева група G називається мінімаксною, якщо вона містить у собі таку вільну абелеву підгрупу H скінченного 0-рангу, що G/H є черніковською групою.

Твердження 2. *Нехай G — група, A — її нормальна абелева підгрупа без скруту. Припустимо, що A — мінімаксна. Нехай H — підгрупа G, для якої $G = AH$. Якщо H є спряжено-переставною підгрупою G, то H є субнормальною в G.*

Нехай G — майже розв'язна група. Будемо говорити, що G — мінімаксна, якщо G має скінченний ряд нормальних підгруп, нескінченні фактори якого є абелевими та мінімаксними.

Нехай G — майже розв'язна мінімаксна група. Оскільки її абелеві періодичні підгрупи є черніковськими, то $\mathrm{Tor}(G)$ є черніковською. Нехай $\mathrm{div}(G)$ — максимальна подільна підгрупа $\mathrm{Tor}(G)$ (подільна частина G). Тоді $G/\mathrm{div}(G)$ містить у собі таку нормальну нільпотентну підгрупу $L/\mathrm{div}(G)$ без скруту, що G/L — майже абелева та скінченно породжена [8, теорема 4]. Якщо $\mathrm{div}(G) = \langle 1 \rangle$, то G називається *редукованою* мінімаксною групою.

Наслідок 5. *Нехай G — майже розв'язна мінімаксна група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Якщо G — редукована, то H є субнормальною підгрупою G.*

Наслідок 6. *Нехай G — майже поліциклічна група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Тоді H є субнормальною підгрупою G.*

Вище відзначалося, що якщо спряжено-переставна підгрупа H має скінченну множину спряжених з нею підгруп, то вона є субнормальною. Зазначимо, що якщо множина спряжених H підгруп є скінченною, то $N_G(H)$ містить у собі G-інваріантну підгрупу K, для якої фактор–група G/K є скінченною. Нижчеподаний наслідок узагальнює цю ситуацію.

Наслідок 7. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Припустимо, що $N_G(H)$ містить у собі таку G-інваріантну підгрупу K, що фактор-група G/K є майже розв'язною та редукованою мінімаксною групою. Тоді H є субнормальною підгрупою G.*

Розглянемо тепер спряжено-переставні підгрупи черніковських груп.

Теорема 2. *Нехай G — черніковська група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Тоді H є субнормальною підгрупою G. Більш того, $[H, \mathrm{div}(G)] = \langle 1 \rangle$.*

Наведений нижче результат значно посилює теорему 2.7 статті [6].

Наслідок 8. *Нехай G — група, циклічні підгрупи якої є спряжено-переставними. Якщо G задовольняє умову мінімальності, то G є нільпотентною черніковською групою.*

Теорема 3. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Припустимо, що G містить у собі нормальну підгрупу L, що задовольняє такі умови:*

а) $G = LH$;

б) L має зростаючий ряд H-інваріантних підгруп, фактори якого або скінченні, або є абелевими мінімаксними групами.

Тоді H є зростаючою підгрупою G.

Наслідок 9. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Припустимо, що G має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого або скінченні, або є абелевими мінімаксними групами. Тоді H є зростаючою підгрупою G.*

Наслідок 10. *Нехай G — майже розв'язна мінімаксна група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Тоді H є зростаючою підгрупою G.*

Наслідок 11. *Нехай G — група, H — її спряжено-переставна підгрупа. Припустимо, що $N_G(H)$ містить у собі таку G-інваріантну підгрупу K, що фактор-група G/K має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого або скінченні, або є абелевими мінімаксними групами. Тоді H є зростаючою підгрупою G.*

Як уже зазначалося вище, в роботі [4] було розпочато розгляд груп, циклічні підгрупи яких є спряжено-переставними. Сформульований нижче результат дає суттєве посилення результатів роботи [4].

Теорема 4. *Нехай G — група, всі циклічні підгрупи якої спряжено-переставні. Тоді G — локально нільпотентна та гіперабелева. Більш того, фактор-група $G/\operatorname{Tor}(G)$ є нільпотентною класу не вище 3.*

Як наслідки з цієї теореми випливають теореми 4.1 та 4.6 роботи [4].

Наслідок 12. *Нехай G — група, всі підгрупи якої спряжено-переставні. Тоді G — локально нільпотентна та гіперабелева. Більш того, фактор-група $G/\operatorname{Tor}(G)$ є нільпотентною класу не вище 3.*

Як наслідок з цієї теореми випливає теорема 2.7 роботи [4].

1. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups. – Berlin: W. de Gruyter, 1994. – 572 p.
2. *Szep J.* Bemerkung zu einem Satz von O. Ore // Publ. Math. Debrecen. – 1953. – **3**. – P. 81–82.
3. *Foguel T.* Conjugate-permutable subgroups // J. Algebra. – 1997. – **191**. – P. 235–239.

4. *Foguel T.* Groups with all cyclic subgroups conjugate-permutable // J. Group Theory. – 1999. – **2**. – P. 47–52.
5. *Ballester-Bolinches A., Beidleman J. C., Cossey J. et al.* Permutable subnormal subgroups of finite groups // Arch. Math. – 2009. – **92**. – P. 549–557.
6. *Li S., Meng Z.* Groups with conjugate-permutable conditions // Math. Proc. Royal Irish Academy. – 2007. – **107 A**. – P. 115–121.
7. *Stonehewer S. E.* Permutable subgroups of infinite groups // Math. Z. – 1972. – **125**. – P. 1–16.
8. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 3. – С. 567–588.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 21.11.2011

Л. А. Курдаченко, Х. М. Муньоз-Эсколано, Н. А. Турбай

Сопряженно-перестановочные подгруппы некоторых бесконечных групп

Подгруппа H группы G называется сопряженно-перестановочной, если $HH^g = H^gH$ для каждого элемента $g \in G$. Доказана субнормальность сопряженно-перестановочных подгрупп в некоторых классах бесконечных групп, таких, например, как черниковские или почти полициклические группы. Доказано, что в других классах бесконечных групп, таких, например, как почти разрешимые минимаксные группы, каждая сопряженно-перестановочная подгруппа будет возрастающей. Также изучена структура бесконечных групп, каждая циклическая подгруппа которых является сопряженно-перестановочной.

L. A. Kurdachenko, J. M. Munoz-Escolano, N. A. Turbay

Conjugate-permutable subgroups in some infinite groups

A subgroup H of a group G is called conjugate-permutable in G if $HH^g = H^gH$ for each element $g \in G$. We proved that a conjugate-permutable subgroups are subnormal in some classes of infinite groups, in particular, in polycyclic-by-finite groups and in Chernikov groups. We find the classes of infinite groups, in which every conjugate-permutable subgroup is always ascendant, and we consider the structure of infinite groups, whose cyclic subgroups are conjugate-permutable.