УДК 512.54

Я. В. Лавренюк

Про незвідні системи твірних у групах автоморфізмів кореневих дерев

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Досліджено існування незвідних систем твірних для деяких груп та класів груп автоморфізмів кореневих дерев. Зокрема, доведено, що група всіх бієктивних автоматних перетворень та група бієктивних скінченно-автоматних перетворень над довільним алфавітом, що містить хоча б дві літери, мають незвідні системи твірних.

У роботі досліджується така проблема.

Проблема 1. *Чи мають незвідні системи твірних групу всіх бієктивних автоматних перетворень та групу бієктивних скінченно-автоматних перетворень над довільним алфавітом, що містить хоча б дві літери?*

Вперше таку проблему поставили B. Csákány та F. Gécseg [1] в 1965 р. Це питання як відкрита проблема формулювалося також P. Dömösi, зокрема, в роботах [2, проблема 2.1] та [3, проблема 2.31]. Також ця проблема згадується в роботах [4, 5].

У роботі [6] автором анонсовано розв'язання проблеми 1 для випадку групи всіх бієктивних автоматних перетворень над алфавітом, що містить дві літери.

У даному повідомленні доводиться існування незвідних систем твірних для деяких груп та класів груп автоморфізмів кореневих дерев. Зокрема, дано позитивну відповідь на проблему 1.

Спочатку нагадаємо визначення кореневого дерева та деяких груп, що діють на кореневих деревах.

Нехай $\mathsf{X} = (\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots)$ — послідовність скінченних множин $\mathsf{X}_i = \{0, 1, \ldots, n_i\}$ ($n_i \geqslant 1$ для всіх i). X^n — множина всіх слів вигляду $x_1x_2\ldots x_n$, де $x_i \in \mathsf{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$. X^* — множина всіх скінченних слів вигляду $x_1x_2\ldots x_n$, де $x_i \in \mathsf{X}_i$. X^ω — множина всіх нескінченних слів вигляду $x_1x_2\ldots$, де $x_i \in \mathsf{X}_i$. Також вважаємо, що порожнє слово $\varnothing$ міститься в X^*. Множину слів X^* можна розглядати як кореневе дерево T_X: вершина $x_1x_2\ldots x_n$ суміжна з вершиною $x_1x_2\ldots x_{n-1}$, $\varnothing$ — корінь. Визначимо також піддерево T_v для $v \in \mathsf{X}^*$, вершинами якого є слова вигляду $v\mathsf{X}^*$. Рівнем номер n називається множина вершин X^n.

Нехай $\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$ — група всіх автоморфізмів дерева T_X. Зауважимо, що $\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$ можна ототожнити з $\operatorname{Aut} \mathsf{X}^\omega$. Нехай $G < \operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$. Нагадаємо визначення стандартних підгруп групи G:

Підгрупа всіх автоморфізмів, що фіксують всі вершини рівня номер n, позначається $\mathrm{St}_G(n)$ і називається *стабілізатором рівня.*

Якщо $v \in \mathsf{X}^*$, то множина всіх автоморфізмів, які фіксують кожну вершину зовні піддерева T_v, називається *вершинною групою* (чи *жорстким стабілізатором* вершини) і позначається $\mathrm{rist}_G(v)$.

Група, породжена множиною $\bigcup\limits_{v\in\mathsf{X}^n} \mathrm{rist}\, v$, називається *жорстким стабілізатором* рівня номер n і позначається $\mathrm{Rist}_G(n)$.

Незлічені групи з незвідними системами твірних. Нагадаємо, як визначаються деякі класи автоморфізмів T_X.

Автоморфізм g називається *слабко фінітарним*, якщо для довільного $w \in \mathsf{X}^\omega$ існують такі $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathsf{X}^n$, $v \in \mathsf{X}^\omega$, що виконуються рівності $w = uv$ та $g(uv) = g(u)v$.

Два слова w_1, $w_2 \in \mathsf{X}^\omega$ називаються *конфінальними*, якщо існують такі $n \in \mathbb{N}$, u_1, $u_2 \in \mathsf{X}^n$, $v \in \mathsf{X}^\omega$, що $w_1 = u_1 v$ і $w_2 = u_2 v$.

Автоморфізм g називається *конфінальним*, якщо він конфінальні слова переводить у конфінальні.

Нагадаємо тепер, як визначаються деякі підгрупи $\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$:

Група $\operatorname{Aut}_{wf} T_\mathsf{X}$ — група всіх слабко фінітарних автоморфізмів.

Група $\operatorname{Aut}_b T_\mathsf{X}$ — група всіх біконфінальних автоморфізмів. Складається зі всіх конфінальних автоморфізмів $\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$, обернені до яких теж є конфінальними.

Зауважимо, що з визначень цих груп одразу випливають включення

$$\operatorname{Aut}_{wf} T_\mathsf{X} < \operatorname{Aut}_b T_\mathsf{X}.$$

Більш детально ці групи описано, наприклад, в [7].

Теорема 1. *Нижченаведені групи мають незвідні системи твірних:*

група всіх автоморфізмів $\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$*;*

група слабко фінітарних автоморфізмів $\operatorname{Aut}_{wf} T_\mathsf{X}$*;*

група біконфінальних автоморфізмів $\operatorname{Aut}_b T_\mathsf{X}$*.*

Зліченні групи з незвідними системами твірних. Далі ми роглядатимемо дерева слів над алфавітом. Тобто вважатимемо, що $\mathsf{X}_1 = \mathsf{X}_2 = \cdots$. У цьому випадку кореневе дерево T_X називається однорідним.

В однорідному кореневому дереві T_X кожне піддерево T_v, де $v \in \mathsf{X}^n$, може бути природно ототожнене з усім деревом T_X:

$$\pi_v\colon\ x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_m \mapsto x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_m,$$

де $x_1 x_2 \ldots x_n = v$.

Таким чином, якщо $g \in \operatorname{St}_{\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}}(n)$, то дія g на T_v для кожного $v \in \mathsf{X}^n$ може бути ототожнена за допомогою π_v з автоморфізмом g_v дерева T_X, визначеного рівністю $\pi_v(u^g) = (\pi_v(u))^{g_v}$. Автоморфізм g_v називається *станом* g *в* v.

Для кожного $g \in \operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$ можна записати $g = a_g g_n$, де $g_n \in \operatorname{St}_{\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}}(n)$, і $a_g \in \operatorname{Aut}_n T_\mathsf{X}$. Під станом $g|_v$ елемента g у вершині $v \in \mathsf{X}^n$ мається на увазі стан елемента $g_n \in \operatorname{St}_{\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}}(n)$ у вершині v.

Автоморфізм $g \in \operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$ називається *скінченно становим* автоморфізмом, якщо множина всіх його станів скінченна. Всі скінченно станові автоморфізми дерева T_X утворюють групу $\operatorname{FAut} T_\mathsf{X}$.

Підгрупа G групи $\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$ називається *самоподібною*, якщо всі стани елементів G самі є елементами групи G.

Для довільного $g \in \operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$ визначимо $\Theta_n(g) = \{v \in \mathsf{X}^n | g|_v \neq e\}$.

Відомо, що для $g \in \operatorname{FAut} T_\mathsf{X}$ послідовність може рости лише експоненційно чи поліноміально (див. [8, наслідок 7]).

Нагадаємо тепер, як визначаються деякі підгрупи $\operatorname{Aut} T_\mathsf{X}$:

Група $\operatorname{Pol}(m)$ поліноміальних автоматів степеня $m \geqslant 0$ складається з усіх $g \in \operatorname{FAut} T_\mathsf{X}$ таких, що послідовність $\Theta_n(g)$ обмежена поліномом степеня m. Групу $\operatorname{Pol}(0)$ також називають групою обмежених автоматів.

Група $\mathrm{Pol}(\infty)$ поліноміальних автоматів — об'єднання зростаючого ланцюга груп $\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \mathrm{Pol}(m)$.

Група $\mathrm{RAut}\, T_{\mathsf{X}}$ функціонально рекурсивних автоморфізмів — об'єднання всіх скінченно породжених самоподібних підгруп групи $\mathrm{Aut}\, T_{\mathsf{X}}$.

Більш детально ці групи описано в [8–10].

Теорема 2. *Нижченаведені групи мають незвідні системи твірних:*

група $\mathrm{FAut}\, T_{\mathsf{X}}$ *скінченно станових автоморфізмів;*

група $\mathrm{Pol}(0)$ *обмежених автоматів;*

група $\mathrm{Pol}(m)$ *поліноміальних автоматів степеня* $m \in \mathbb{N}$*;*

група $\mathrm{Pol}(\infty)$ *поліноміальних автоматів;*

група $\mathrm{RAut}\, T_{\mathsf{X}}$ *функціонально рекурсивних автоморфізмів.*

Зауважимо, що при побудові незвідних систем твірних у доведеннях теорем 1 та 2 використовується існування базису Гамеля векторного простору над полем. Тому в деяких випадках доведення використовують аксіому вибору.

Зауважимо, що група всіх бієктивних автоматних перетворень над скінченним алфавітом ізоморфна групі всіх автоморфізмів однорідного кореневого дерева відповідної валентності, а група скінченно-автоматних перетворень над скінченним алфавітом ізоморфна групі скінченно станових автоморфізмів однорідного кореневого дерева відповідної валентності. Тому проблема 1 розв'язується позитивно:

Теорема 1. *Група всіх бієктивних автоматних перетворень та група бієктивних скінченно-автоматних перетворень над довільним алфавітом, що містить хоча б дві літери, мають незвідні системи твірних.*

1. *Чакани К., Гечек Ф.* О группе автоматных преобразований // Кибернетика. – 1965. – № 5. – С. 14–17.
2. *Dömösi P.* Some of my favourite unsolved problems // Unsolved problems on mathematics for the 21st century. – Amsterdam: IOS Press; Tokyo: Ohmsha, 2001. – P. 159–168.
3. *Dömösi P., Nehaniv C. L.* Algebraic theory of automata networks. An introduction. – Philadelphia, PA: SIAM, 2005. – 265 p.
4. *Aleshin S.* Automata in algebra // J. Math. Sci. – 2010. – **168**. – P. 14–20.
5. *Nekrashevych V. V., Sushchansky V. I.* Some problems on groups of finitely automatic permutations // Mat. Stud. – 2000. – **13**, No 1. – P. 93–96.
6. *Лавренюк Я. В.* Про мінімальну систему твірних у групі автоморфізмів бінарного кореневого дерева // Доп. НАН України. – 2012. – № 7. – С. 35–37.
7. *Nekrashevych V. V., Sushchansky V. I.* On confinal dynamics of rooted tree automorphisms // Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. – Vol. 275. – P. 229–246.
8. *Sidki S. N.* Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure and acyclicity // J. Math. Sci. – 2000. – **100**, No 1. – P. 1925. – 1943.
9. *Brunner A. M., Sidki S. N.* On the automorphism group of the one-rooted binary tree // J. Algebra. – 1997. – **195**. – P. 465–486.
10. *Sidki S. N.* Regular trees and their automorphisms. – Rio de Janeiro: IMPA, 1998. – Vol. 56. – ii+42 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 08.02.2012

Я. В. Лавренюк

О неприводимых системах образующих в группах автоморфизмов корневых деревьев

Исследовано существование неприводимых систем образующих для некоторых групп и классов групп автоморфизмов корневых деревьев. В частности, доказано, что группа всех биективных автоматных преобразований и группа биективных конечно-автоматных преобразований над произвольным алфавитом, содержащим хотя бы две буквы, имеют неприводимые системы образующих.

Ya. V. Lavrenyuk

On the irreducible systems of generatrices in the automorphism groups of rooted trees

The existence of minimal generating systems for some automorphism groups of rooted trees is proved. Particularly, it is proved that the group of all bijective automaton transformations and the group of all finite bijective automaton transformations over a fixed alphabet with at least two elements have the irreducible systems of generatrices.