УДК 517.95:519.86

В. А. Стоян, К. В. Двірничук

До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей

(Представлено академіком НАН України В. С. Дейнекою)

Розглядаються лінійні динамічні системи, просторово-зосереджені або розподілені в одно-, дво- та багатовимірному просторі. Пропонується алгоритм переходу від визначеної рівнянням та системою рівнянь диференціальної форми математичної моделі до її інтегрального еквіваленту.

Методи псевдоінверсної алгебри, започатковані в [1, 2] та розвинені в [3, 4], у поєднанні з ідеями [5, 6] математичного моделювання впливу початково-крайових зовнішньо-динамічних збурюючих факторів на стан розподілених просторово-часових систем дозволили побудувати [7, 8] просту і надійну методику розв'язання прямих та обернених задач дослідження динаміки таких систем за умов неповноти та некоректності інформації про їх початково-крайовий стан. Суттєвим в запропонованій методиці є наявність передаточної функції від розподілених просторово-часових збурень до стану системи, який цим збуренням відповідає. Питання побудови таких передаточних функцій вивчалися нами у роботах [9, 10], де ці функції будувалися для лінійних динамічних систем, описаних лінійними диференціальними рівняннями [9], або системою таких рівнянь [10]. Дієздатність отриманих при цьому наукових результатів була проілюстрована [10, 11] на одновимірних динамічних системах. Розв'язання проблем практичної реалізації методик [9, 10] для лінійних динамічних систем більшої вимірності і розглядаються нижче.

1. Розглянемо просторово розподілену динамічну систему, функція $y = (x, t)$ (тут $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — просторова координата; t — час, а $\partial_x = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ та ∂_t — похідні за цими координатами і часом) якої задовольняє рівняння

$$L(\partial_x, \partial_t)y(x, t) = u(x, t), \tag{1}$$

в якому $L(\partial_x, \partial_t)$ — лінійний диференціальний оператор, а $u(x, t)$ — просторово розподілене зовнішньо-динамічне збурення, що супроводжує динаміку розглядуваної системи. Рівняння (1) є частинним випадком диференціальної моделі вигляду

$$A(\partial_x, \partial_t)\vec{y}(x, t) = \vec{u}(x, t), \tag{2}$$

яка при визначеному матричному диференціальному операторі

$$A(\partial_x, \partial_t) = [a_{ij}(\partial_x, \partial_t)]_{i,j=1}^{i=M, j=L}$$

(тут $a_{ij}(\partial_x, \partial_t)$, як і вище, — лінійні диференціальні оператори) та при визначеній вектор-функції

$$\vec{u}(x, t) = \mathrm{col}(u_m(x, t), m = \overline{1, M})$$

описує вектор-функцію

$$\vec{y}(x,t) = \mathrm{col}(y_l(x,t), l = \overline{1,L})$$

стану системи.

Еквівалентним, більш зручним [7, 8] для практичного використання, поданням лінійних диференціальних моделей (1), (2) є інтегральне подання [9, 10]:

$$y(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (G(x-x', t-t')u(x',t'))\,dx'dt', \tag{3}$$

$$\vec{y}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\overline{G}(x-x', t-t')\vec{u}(x',t'))\,dx'dt', \tag{4}$$

в якому

$$G(x-x', t-t') = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{e^{p(x-x')+q(t-t')}}{L(p,q)}\right) dpdq, \tag{5}$$

$$\overline{G}(x-x', t-t') = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} (A^{-1}(p,q)E(p,q,x-x',t-t'))\,dpdq \tag{6}$$

за умови, що i — уявна одиниця; $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $dp = dp_1 \cdots dp_n$, $p(x-x') = p_1(x_1 - x'_1) + \cdots + p_n(x_n - x'_n)$, $E(p,q,x-x',t-t') = \mathrm{diag}(e^{p(x-x')+q(t-t')}, m = \overline{1,M})$.

Для просторово зосереджених динамічних систем, коли $n = 0$, визначення (5), (6) функції $G(t-t')$ та матричної функції $\overline{G}(t-t')$ заміняться такими:

$$G(t-t') = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}[L^{-1}(q)e^{q(t-t')}, q_k], \tag{7}$$

$$\overline{G}(t-t') = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Res}[A^{-1}(q)e^{q(t-t')}, q_k]. \tag{8}$$

Тут $\mathrm{Res}[f(q), q_k]$ — інтегральний лишок функції $f(q)$ в точці q_k, де q_k — k-й корінь рівняння

$$L(q) = 0 \tag{9}$$

для (7) та рівняння

$$\det A(q) = 0 \tag{10}$$

для (8), а K — кількість таких коренів.

Враховуючи, що у нашому випадку

$$f(q) = \frac{\varphi(q)}{\psi(q)}, \tag{11}$$

де

$$\varphi(q) = e^{q(t-t')}, \qquad \psi(q) = L(q)$$

для (7), та

$$\varphi(q) = e^{q(t-t')}[A_{ij}]_{j,i=1}^{j=L,i=M}, \qquad \psi(q) = \det A(q)$$

(тут $A_{ji}(q)$ — алгебраїчне доповнення елемента $a_{ij}(q)$ матриці $A(q)$) для (8), маємо

$$\operatorname{Res}[f(q), q_k] = \frac{\varphi(q_k)}{\psi'(q_k)}, \tag{12}$$

якщо q_k — простий корінь, або

$$\operatorname{Res}[f(q), q_k] = \frac{1}{(N_k-1)!}\lim_{q\to q_k}\left(\frac{d^{N_k-1}}{dq^{N_k-1}}((q-q_k)^{N_k} f(q))\right), \tag{13}$$

якщо q_k — N_k-кратний корінь (9), (10).

2. Співвідношення (7), (8) для побудови передаточної функції $G(t-t')$ системи (1) та передаточної матричної функції $\overline{G}(t-t')$ системи (2) ($n=0$) мають місце, коли q_k ($k=\overline{1,K}$) — ізольовані корені рівняння (9) та (10) відповідно. Останнє не створює ніяких проблем для випадку, коли $n=0$, оскільки q_k ($k=\overline{1,K}$) тут є коренями поліномів $L(q)$ та $\det A(q)$ відповідно. Проблеми можуть виникнути (і вони виникають), коли $n\geqslant 1$, а корені рівнянь

$$L(p,q) = 0 \tag{14}$$

та (тут та далі $p=(p_1,\ldots,p_n)$)

$$\det A(p,q) = 0 \tag{15}$$

розміщені на кривій, поверхні та гіперповерхні у просторі змінних $p_1, \ldots, p_n, q$.

Для початку обмежемося випадком, коли $n=1$, а розв'язки рівнянь (14), (15) визначаються кривою

$$l(p,q) = 0,$$

або (що еквівалентно)

$$q = q_k(p) \qquad (1 \geqslant k \geqslant K), \tag{16}$$

у просторі змінних p, q.

При реалізації співвідношень (12), (13) та (7), (8) будемо виходити з того, що визначена згідно з (11) для $n=0$ функція $f(q)$ тепер матиме вигляд

$$f(p,q) = \frac{\varphi(p,q)}{\psi(p,q)} \qquad \text{при} \qquad \varphi(p,q) = e^{p(x-x')+q(t-t')}, \qquad \psi(p,q) = L(p,q) \tag{17}$$

для $G(x-x', t-t')$ та

$$\varphi(p,q) = e^{p(x-x')+q(t-t')}[A_{ji}(p,q)]_{j,i=1}^{j=L,i=M}, \qquad \psi(p,q) = \det A(p,q) \tag{18}$$

для $\overline{G}(x-x', t-t')$ відповідно.

З урахуванням (16) аналогічно (12), (13) для інтегрального лишку функції $f(p,q)$, вирахуваного у точці $(p_{k_1}^{(k)}, q_k(p_{k_1}^{(k)}))$ $(k=\overline{1,K})$, маємо:

$$\operatorname{Res}(f(p,q), p_{k_1}^{(k)}, q_k(p_{k_1}^{(k)})) = \operatorname{Res}\left[\frac{\varphi_{1k}(p)}{\psi_{1k}(p)}, p_{k_1}^{(k)}\right], \tag{19}$$

де

$$\frac{\varphi_{1k}(p)}{\psi_{1k}(p)} = \operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(p,q)}{\psi(p,q)}, q = q_k(p)\right], \tag{20}$$

а $p_{k_1}^{(k)}$ $(k_1 = \overline{1,K_k},\ k=\overline{1,K})$ — корені рівняння $\psi_{1k}(p)=0$.

А це означає, що співвідношення (7), (8) у цьому випадку запишуться у вигляді

$$\left.\begin{matrix} G(x-x',t-t') \\ \overline{G}(x-x',t-t') \end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{k_1=1}^{K_k} \operatorname{Res}[f(p,q), p_{k_1}^{(k)}, q_k(p_{k_1}^{(k)})] = \sum_{k=1}^{K}\sum_{k_1=1}^{K_k} \operatorname{Res}\left[\frac{\varphi_{1k}(p)}{\psi_{1k}(p)}, p_{k_1}^{(k)}\right], \tag{21}$$

де $\varphi_{1k}(p)$, $\psi_{1k}(p)(k=\overline{1,K})$ — функції, згідно з (20) визначені через введені в (17), (18) функції $\varphi(p,q)$, $\psi(p,q)$, а розуміння Res $[\ldots]$ дано в (12), (13).

3. Розглянемо поширення отриманих вище результатів з побудови передаточної функції (5) та матриці (6) для випадку, коли $n=2$.

Будемо виходити з того, що, аналогіно (7), (8) та (19), функція $G(x-x',t-t')$ та матриця $\overline{G}(x-x',t-t')$, в яких $x=(x_1,x_2)$, визначатимуться інтегральними лишками функції

$$f(p_1,p_2,q) = \frac{\varphi(p_1,p_2,q)}{\psi(p_1,p_2,q)}$$

при

$$\varphi(p_1,p_2,q) = e^{p(x-x')+q(t-t')}, \qquad \psi(p_1,p_2,q) = L(p_1,p_2,q) \tag{22}$$

для $G(x-x',t-t')$ та

$$\varphi(p_1,p_2,q) = e^{p(x-x')+q(t-t')}[A_{ji}]_{j,i=1}^{j=l,i=M}, \qquad \psi(p_1,p_2,q) = \det A(p_1,p_2,q) \tag{23}$$

для $\overline{G}(x-x',t-t')$. Тут, як і вище, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $p=(p_1,\ldots,p_n)$,

$$p(x-x') = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_i').$$

Для побудови співвідношень, аналогічних (19), припустимо, що нулі функції $\psi(p_1,p_2,q)$ належать поверхням

$$q = q_k(p_1,p_2) \qquad (k=\overline{1,K}), \tag{24}$$

а функції $\psi_{1k}(p_1,p_2)$ такі, що

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(p_1,p_2,q)}{\psi(p_1,p_2,q)}, q = q_k(p_1,p_2)\right] = \frac{\varphi_{1k}(p_1,p_2)}{\psi_{1k}(p_1,p_2)}, \ — \tag{25}$$

лініям

$$p_1 = p_{1kk_1}(p_2) \qquad (k_1 = \overline{1, K_k}, k = \overline{1, K}). \tag{26}$$

Позначивши через $p_{2k_2}^{(kk_1)}$ k_2-й ($k_2 = \overline{1, K_{kk_1}}$) корінь рівняння

$$\psi_{2kk_1}(p_2) = \psi_{1k}(p_{1kk_1}(p_2), p_2) = 0 \qquad (k_1 = \overline{1, K_k}, k = \overline{1, K}),$$

де

$$\frac{\varphi_{2kk_1}(p_2)}{\psi_{2kk_1}(p_2)} = \operatorname{Res}\left[\frac{\varphi_{1k}(p_1, p_2)}{\psi_{1k}(p_1, p_2)}, p_1 = p_{1kk_1}(p_2)\right], \tag{27}$$

аналогічно (19) визначимо

$$\begin{aligned} &R_{kk_1k_2}(x - x', t - t') = \\ &\quad = \operatorname{Res}[f(p_1, p_2, q), p_{1kk_1}(p_{2k_2}^{(kk_1)}), p_{2k_2}^{(kk_1)}, q_k(p_{1kk_1}(p_{2k_2}^{(kk_1)}), p_{2k_2}^{(kk_1)})] = \\ &\quad = \operatorname{Res}\left[\frac{\varphi_{2kk_1}(p_2)}{\psi_{2kk_1}(p_2)}, p_{2k_2}^{(kk_1)}\right] \qquad (k_2 = \overline{1, K_{kk_1}}, k_1 = \overline{1, K_k}, k = \overline{1, K}). \end{aligned} \tag{28}$$

З урахуванням (28) та визначень функцій $\varphi_{2kk_1}(p_2)$, $\psi_{2kk_1}(p_2)$ для передаточної функції $G(x - x', t - t')$ рівняння (1) та передаточної матричної функції $\overline{G}(x - x', t - t')$ системи (2) аналогічно (21) маємо:

$$\left.\begin{array}{l} G(x - x', t - t') \\ \overline{G}(x - x', t - t') \end{array}\right\} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{k_1=1}^{K_k} \sum_{k_2=1}^{K_{kk_1}} R_{kk_1k_2}(x - x', t - t'). \tag{29}$$

4. Запишемо узагальнення співвідношень (24)–(27) на випадок довільного n. Для цього, аналогічно (24), (26), позначимо через

$$q = q_k(p_1, \ldots, p_n) \qquad (k = \overline{1, K}), \tag{30}$$

$$p_1 = p_{1kk_1}(p_2, \ldots, p_n) \qquad (k_1 = \overline{1, K_k}), \tag{31}$$

$$p_2 = p_{2kk_1k_2}(p_3, \ldots, p_n) \qquad (k_2 = \overline{1, K_{kk_1}}), \tag{32}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{n-2} = p_{(n-2)kk_1k_2\ldots k_{n-2}}(p_{n-1}, p_n) \qquad (k_{n-2} = \overline{1, K_{kk_1\ldots k_{n-3}}}), \tag{33}$$

$$p_{n-1} = p_{(n-1)kk_1k_2\ldots k_{n-1}}(p_n) \qquad (k_{n-1} = \overline{1, K_{kk_1\ldots k_{n-2}}}) \tag{34}$$

гіперповерхні, поверхню та лінію, на яких обертаються в нуль функції $\psi(p_1, \ldots, p_n, q)$, $\psi_{1k}(p_1, \ldots, p_n), \ldots, \psi_{nkk_1\ldots k_{n-1}}(p_n)$, визначені співвідношеннями

$$\psi(p_1, \ldots, p_n, q) = \begin{cases} L(p, q) & \text{для рівняння} \quad (1), \\ \det A(p, q) & \text{для системи} \quad (2), \end{cases} \tag{35}$$

$$\frac{\varphi_{1k}(p_1, \ldots, p_n)}{\psi_{1k}(p_1, \ldots, p_n)} = \operatorname{Res}\left[\frac{\varphi(p_1, \ldots, p_n, q)}{\psi(p_1, \ldots, p_n, q)}, q = q_k(p_1, \ldots, p_n)\right], \tag{36}$$

$$\frac{\varphi_{jkk_1\ldots k_{j-1}}(p_j,\ldots,p_n)}{\psi_{jkk_1\ldots k_{j-1}}(p_j,\ldots,p_n)}=$$
$$=\operatorname{Res}\left[\frac{\varphi_{(j-1)kk_1\ldots k_{j-2}}(p_{j-1},\ldots,p_n)}{\psi_{(j-1)kk_1\ldots k_{j-2}}(p_{j-1},\ldots,p_n)},p_{j-1}=p_{(j-1)kk_1\ldots k_{j-1}}(p_j,\ldots,p_n)\right], \qquad (37)$$
$$j=\overline{2,n}.$$

Позначимо через $\overline{p}_{nk_n}^{(kk_1\ldots k_{n-1})}$ k_n-й ($k_n=\overline{1,K_{kk_1\ldots k_{n-1}}}$) корінь рівняння

$$\psi_{nkk_1\ldots k_{n-1}}(p_n)=0,$$

а через

$$\overline{p}_{n-1}=p_{(n-1)kk_1\ldots k_{n-1}}(\overline{p}_{nk_n}^{(kk_1\ldots k_{n-1})}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{p}_2=p_{2kk_1k_2}(\overline{p}_3,\ldots,\overline{p}_{n-1},\overline{p}_{nk_n}^{(kk_1\ldots k_{n-1})}),$$
$$\overline{p}_1=p_{1kk_1}(\overline{p}_2,\ldots,\overline{p}_{n-1},\overline{p}_{nk_n}^{(kk_1\ldots k_{n-1})})\text{ —}$$

точки гіперповерхонь (30)–(32), поверхні (33) та лінії (34), аналогічно (29) отримаємо

$$\left.\begin{array}{l}G(x-x',t-t')\\ \overline{G}(x-x',t-t')\end{array}\right\}=\sum_{k=1}^{K}\sum_{k_1=1}^{K_k}\sum_{k_2=1}^{K_{kk_1}}\ldots\sum_{k_n=1}^{K_{kk_1\ldots k_{n-1}}}R_{kk_1\ldots k_n}(x-x',t-t'), \qquad (38)$$

де

$$R_{kk_1\ldots k_n}(x-x',t-t')=\operatorname{Res}\left[\frac{\varphi_{nkk_1\ldots k_{n-1}}(p_n)}{\psi_{nkk_1\ldots k_{n-1}}(p_n)},\overline{p}_{nk_n}^{(kk_1\ldots k_{n-1})}\right],$$

при визначених згідно з (35)–(37) функціях $\varphi_{nkk_1\ldots k_{n-1}}(p_n)$ та $\psi_{nkk_1\ldots k_{n-1}}(p_n)$.

Останнє закінчує процедуру побудови передаточної функції $G(x-x',t-t')$ та передаточної матриці-функції $\overline{G}(x-x',t-t')$ рівнянь (1), (2) — функцій, які є ядрами інтегральних зображень (3), (4) цих рівнянь.

5. На завершення зауважимо, що знайдені згідно з (7), (8) (для $n=0$), (21) (для $n==1$), (29) (для $n=2$) та (38) (для довільного $n\geqslant 1$) функція $G(x-x',t-t')$ та матрична функція $\overline{G}(x-x',t-t')$ мають відповідати своїй фізичній суті і повинні задовольняти умови симетричності, неперервності та затухання на нескінченності.

З урахуванням цього запронована вище методика побудови названих передаточних функцій перевірялася на прикладах систем, для яких в рамках перетворення Лапласа–Карсона [12] та розв'язання початково-крайових задач через апарат фундаментальних розв'язків [13] досліджувалися інтеграли вигляду (5).

Так, знайдене згідно з (7),

$$G(x-x')=\frac{1}{2\lambda}\sin(\lambda|x-x'|)$$

збігається [13] з фундаментальним розв'язком рівняння Гельмгольца

$$(\partial_x^2 + \lambda^2)y(x) = \delta(x - x'),$$

а

$$G(x - x', t - t') = e^{a(x-x')+b(t-t')} \qquad \text{та} \qquad G(x - x', t - t') = -\frac{1}{2c}H[c(t - t') - |x - x'|]$$

(тут H — функція Хевісайда), знайдені згідно з (21), — із результатом [12] обчислення інтеграла вигляду (5) для

$$L(p, q) = (p - a)(q - b)$$

та фундаментальним розв'язком [13] хвильового рівняння

$$(c^2\partial_x^2 - \partial_t^2)y(x, t) = \delta(x - x')\delta(t - t'),$$

де наведені нами функції $G(x - x')$, $G(x - x', t - t')$ будувалися із застосуванням інших математичних підходів. Останнє підтверджує правильність запропонованого тут підходу до побудови ядер інтегральних еквівалентів лінійних диференціальних моделей динаміки розподілених просторово-часових систем.

1. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. – Москва: Наука, 1977. – 305 с.
2. *Гантмахер А. Ф.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. – 287 с.
3. *Кириченко Н. Ф.* Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Пробл. управления и информатики. – 1995. – № 1. – С. 114–127.
4. *Кириченко Н. Ф., Стоян В. А.* Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и систем. анализ. – 1998. – № 3. – С. 90–104.
5. *Стоян В. А.* Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Пробл. управления и информатики. – 1998. – № 1. – С. 79–86.
6. *Кириченко Н. Ф., Стоян В. А.* Построение общего решения начально-краевых задач, задач наблюдения и терминального управления для систем с распределенными параметрами // Электромагн. волны и электрон. системы. – 1999. – № 6. – С. 4–15.
7. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Київ: Наук. думка, 2001. – 361 с.
8. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. – Київ: Сталь, 2008. – 316 с.
9. *Стоян В. А.* До побудови функцій Гріна для систем з розподіленими параметрами // Вычисл. и прикл. математика. – 1998. – Вып. 83. – С. 108–111.
10. *Стоян В. А., Когут О. В., Крисак Я. В.* Про інтегральне представлення лінійно-диференціальних рівнянь динаміки розподілених просторово-часових процесів // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Кібернетика. – 2010. – Вип. 10. – С. 28–30.
11. *Стоян В. А.* Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами: Навч. пос. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 201 с.
12. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 465 с.
13. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. – Москва: Мир, 1982. – 248 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 17.01.2012

В. А. Стоян, К. В. Двирнычук

К построению интегрального эквивалента линейных дифференциальных моделей

Рассматриваются линейные динамические системы, пространственно сосредоточенные или распределенные в одно-, двух- и многомерном пространстве. Предлагается алгоритм перехода от определенной уравнением и системой уравнений дифференциальной формы математической модели к ее интегральному эквиваленту.

V. A. Stoyan, K. V. Dvirnychuk

Constructing the integral equivalent of linear differential models

The paper considers linear dynamic systems dimensionally concentrated or distributed in one-, two-, and multidimensional spaces. An algorithm of transition from a mathematical model defined by a differential equation and a system of differential equations to its integral equivalent is proposed.