

Член-корреспондент НАН Украины А. И. Шевченко, А. С. Миненко,  
О. А. Золотухина

## Численный анализ одной нелинейной математической модели

*Исследуется задача Стефана с учетом конвективного движения в жидкой фазе. Построено приближенное решение задачи с применением метода малого параметра.*

**Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  — заданная область, граница которой  $\partial\Omega$  состоит из двух замкнутых, связных гладких поверхностей  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , не имеющих самопересечений, причем поверхности  $\Gamma^\pm$  предполагаются принадлежащими классу  $H^{5+\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Пусть далее  $\Gamma_t (t \in [0, T])$  — гладкие замкнутые поверхности, лежащие внутри  $\Omega$ , такие, что  $\Gamma^+$  лежит внутри ограничений области, границей которой является  $\Gamma_t$ . Свободная поверхность  $\Gamma_t$  — граница раздела фаз в момент времени  $t$  — разбивает область  $\Omega$  на две связные подобласти  $\Omega_t^-$  и  $\Omega_t^+$ , занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно. Требуется определить вектор скорости  $\vec{V}(x, t)$ , давление  $p(x, t)$ , распределения температур твердой и жидкой фаз  $u^-(x, t)$  и  $u^+(x, t)$  и свободную поверхность  $\Gamma_t$  по следующим условиям:

$$\frac{\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) = \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2\vec{V}(x, t) + \vec{f}(u^+), \quad \nabla\vec{V}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u^+(x, t) + (\vec{V}\nabla)u^+(x, t) - a_+^2\nabla^2u^+(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_T^+, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u^-(x, t) - a_-^2\nabla^2u^-(x, t) = 0, \quad (x, t) \in D_T^-, \quad (3)$$

$$u^\pm(x, t)|_{t=0} = A^\pm(x), \quad u^\pm(x, t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-} = B^\pm(x, t), \quad (4)$$

$$\vec{V}(x, t)|_{t=0} = \vec{C}(x), \quad \vec{V}(x, t)|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma_t} = 0, \quad (5)$$

$$u^\pm(x, t)|_{x \in \Gamma_t} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \left[ K_- \frac{\partial u^-}{\partial x_i} - K_+ \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right] \cos(n, x_i) + K \cos(n, t) = 0, \quad x \in \Gamma_t, \quad (6)$$

где  $D_T^\pm = \{(x, t): x \in \Omega_t^\pm, t \in (0, T)\}$ ;  $\partial\Omega^\pm = \Gamma_t \cup \Gamma^\pm$ ;  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ ;  $\vec{n}$  — нормаль к  $\Gamma_t$ , направлена в сторону  $\Omega_t^+$ . Предполагается, что  $B^\pm(x, t) \in H^{3+\beta, (3+\beta)/2}(\Gamma^\pm \times [0, T])$ ,  $0 < \beta < \alpha$ ,  $A^\pm(x) \in H^{5+\alpha}(\overline{\Omega}_0^\pm)$ ,  $\vec{C}(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^+)$ , где  $\Omega_0^\pm$  — области, на которые разбивает  $\Omega$  граница раздела фаз  $\Gamma_0$  в момент времени  $t = 0$  и  $B^\pm(x, t) \geq \varepsilon_0 > 0$  при  $(x, t) \in \Gamma^\pm \times [0, T]$ .

Параметры  $a_\pm$ ,  $K_\pm$ ,  $K$ ,  $\text{Re}$ ,  $\varepsilon_0$  считаются положительными постоянными, а  $\vec{f}(u^+)$  — принадлежащей классу  $C^2(R^1)$ ,  $\vec{f}'(u^+)$  — ограниченной в  $R^1$ . Задача (1)–(6) при малых значениях  $t$  разрешима в классе гладких функций, при этом  $u^\pm \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{D_T^\pm})$ ,  $\vec{V} \in H^{2+\beta, (2+\beta)/2}(\overline{D_T^\pm})$ , а свободная поверхность  $\Gamma_t$  принадлежит классу  $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$  [1].

Настоящая работа посвящена приближенному анализу задачи (1)–(6).

**Приближенное решение задачи (1)–(6).** Для точек поверхности  $\Gamma_0$  введем координаты  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ , через  $x(\omega) \in \Gamma_0$  или через  $\omega$  будем обозначать также соответствующие точки в  $R^3$ . Далее, пусть  $\vec{n}(\omega)$  — нормаль к  $\Gamma_0$ , направленная внутрь  $\Omega_0^+$ . В работе [1] установлено, что поверхность  $\Gamma_t$  можно представить в виде  $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega, t)\}$  с некоторой функцией  $\rho(\omega, t)$  класса  $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0, T])$ , так что  $\rho(\omega, 0) = 0$ .

Предположим, что при малых значениях  $Re$  неизвестные нашей задачи можно представить в виде степенного ряда:

$$u^\pm(x, t) = u_0^\pm(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (Re)^k u_k^\pm(x, t);$$

$$V_i(x, t) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (Re)^k V_{ik}(x, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\rho(\omega, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (Re)^k \rho_k(\omega, t).$$

В работах [1–8] изучены нулевые и первые приближения задачи (1)–(6) для малых чисел  $Re$ . При этом установлено, что  $u_0^\pm = A^\pm(x)$ ,  $\vec{V}_0(x) = \vec{C}(x)$ ,  $\rho_1(\omega, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0, T])$ ,  $u_1^\pm(x, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{D_T^\pm})$ , причем  $\rho_1(\omega, t)$  находим как неподвижную точку сжимающегося оператора  $M_1$ :

$$M_1 \rho_1 = \frac{1}{K} \int_0^t \left( K_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - K_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f(x, t) \right) dt, \quad x(\omega) \in [0, T],$$

а  $f_1(x, t)$  — некоторая функция класса  $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ .

**Приближенное построение поверхности  $\Gamma_t$ .** Рассмотрим случай, когда  $B^\pm = B^\pm(x)$  и  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$ . Тогда нулевое приближение находим как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \nabla^2 u^\pm(x) = 0, & x \in \Omega_0^\pm, & A^\pm(x)|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x), & u^\pm(x)|_{\Gamma_0} = 0, \\ \vec{C}(x) = 0, & x \in \overline{\Omega_0^\pm}, & |\nabla u^-(x)| - |\nabla u^+(x)| = 0, & x \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что замена  $\tilde{u}^- = K_- u^-$  при  $x \in \Omega^-$  и  $\tilde{u}^+ = K_+ u^+$ , если  $x \in \Omega^+$  сводит задачу (7) к случаю  $|\nabla u^-(x)| = |\nabla u^+(x)|$ ,  $x \in \Gamma_0$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Нулевое приближение  $u_0^\pm(x)$ ,  $\Gamma_0$  найдем из условия минимума функционала  $Y(u_0^\pm, \Gamma_0) = \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 dx_3$  (здесь  $\Omega = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$  и  $u = u^-$  при  $x \in \Omega^-$  и  $u = u^+$ , если  $x \in \Omega^+$ ).

Далее, рассматривая функционал  $Y$  в сферических координатах, получим

$$Y(u_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_r^R \left( u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} u_\varphi^2 \right) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho.$$

Минимум функционала ищем в следующем виде:

$$u = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} (B^- + B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2) \sum_{k=0}^{\infty} C_k \rho^k.$$

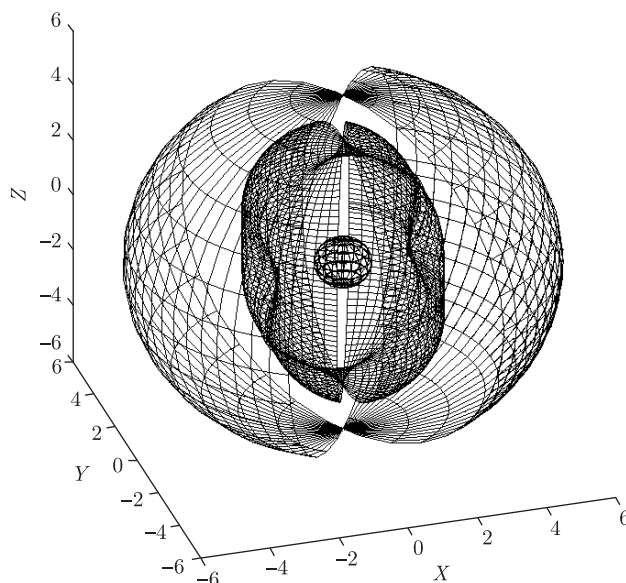


Рис. 1

Неизвестные коэффициенты  $C_K$  определяются методом Ритца. В частности, в случае нулевого приближения

$$u_0 = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^- + B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)C_0,$$

из уравнения  $\partial Y(u_0)/\partial C_0 = 0$  определим коэффициент  $C_0$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Поверхность  $\Gamma_0$  представляет собой поверхность класса  $C^\infty$ , не имеющую самопересечений и расположенную относительно  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  аналогично поверхности  $\Gamma_t$  в задаче (1)–(6).

Доказательство следует из принципа максимума, примененного к гармонической функции  $\Psi(x) = -\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}}$  оценок  $-\frac{\partial u_0(x)}{\partial \vec{r}} \Big|_{\bar{\Omega}} \geq \tilde{\varepsilon}_0 > 0$  и теоремы о неявной функции, примененной к  $\Psi(x)$ . Здесь  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки  $x$ .

Отсюда следует, что поверхность  $\Gamma_0: \rho = \rho_0(\varphi, \theta)$  можно найти из условия  $u_0(\varphi, \theta, \rho_0(\varphi, \theta)) = 0$ . Тогда для поверхности  $\Gamma_t$  можно воспользоваться уравнением [2]:

$$\Gamma_t = \rho(\varphi, \theta, t) = \rho_0(\varphi, \theta) - \operatorname{Re} \frac{u_1^\pm(\varphi, \theta, t)}{|\nabla A^\pm(\varphi, \theta)|} + o(\operatorname{Re}).$$

На рис. 1 представлена поверхность  $\Gamma_t$  при следующих значениях параметров:  $t = 200$ ,  $R = 6$ ,  $r = 0,8$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/3$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $B^+ = 3[\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi]$ ,  $B^- = -0,35[\cos^2 \theta + \cos^2 \varphi] - 0,1$ . Свободная поверхность  $\Gamma_t$  расположена между сферами радиусов  $R$  и  $r$ .

Предложенный алгоритм построения поверхности  $\Gamma_t$  позволяет исследовать эту поверхность в зависимости от параметров задачи (1)–(6).

1. Шевченко А. И., Миненко А. И. Задача Стефана при наличии конвекции // Доп. НАН України. – 2012. – № 1. – С. 20–25.
2. Миненко А. С. Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.

3. Шевченко А. И., Миненко А. С. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 30–34.
4. Шевченко А. И., Миненко А. С. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Там само. – 2010. – № 5. – С. 36–40.
5. Шевченко А. И., Миненко А. С. Приближенный анализ пространственной конвективной задачи Стефана // Там само. – 2010. – № 10. – С. 29–33.
6. Миненко А. С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, № 11. – С. 1546–1556.
7. Миненко А. С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Там само. – 2007. – 58, № 10. – С. 1385–1394.
8. Шевченко А. И., Миненко А. С. Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей // Доп. НАН України. – 2011. – № 6. – С. 35–39.

Институт информатики и искусственного  
интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступило в редакцию 20.02.2012

Член-корреспондент НАН України **А. І. Шевченко, А. С. Міненко,  
О. А. Золотухіна**

### **Числовий аналіз однієї нелінійної математичної моделі**

*Досліджується задача Стефана з урахуванням конвекції в рідині. Із застосуванням методу малого параметра побудовано наближений розв'язок задачі.*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko,  
O. A. Zolotukhina**

### **Numerical analysis of a nonlinear mathematical model**

*The Stefan convection problem in the liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed by using the method of small parameter.*