УДК 539.3.

В. А. Галазюк, Г. Т. Сулим

Напружено-деформований стан необмеженого середовища із “залікованою” дисковою тріщиною

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Г. С. Кітом)

З використанням концепції межових шарів розв'язана некоректна задача визначення параметрів внутрішнього межового шару у площині тріщини, який при довільно заданих нормальних напруженнях на її поверхнях забезпечує їх повний контакт без додаткового тиску.

У роботі [1] запропоновано математичну інтерпретацію явища деформування тіла з дисковою тріщиною, в якій вона вважається частиною площини розриву параметрів напружено-деформованого стану нульового порядку [2] — внутрішнім межовим шаром (рос. — погранслоем). Використання концепції внутрішнього межового шару дає можливість за допомогою межового шару з тими або іншими параметрами формулювати і розв'язувати обернені задачі теорії тріщин, задачі управління напруженнями і переміщеннями на берегах тріщини, а разом з тим виконанувати, крім класичних коректних і некоректних крайових умов на поверхнях тріщини, також і фізично обгрунтовану вимогу неперервності зміни пружних кутів повороту лінійних елементів на її фронті, забезпечуючи там плавне змикання її поверхонь.

1. Однорідний ізотропний пружний простір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, R, R\gamma)$ і вважатимемо, що під дією навантаження у просторі реалізується осесиметричний відносно осі γ напружено-деформований стан. Відповідно до результатів [1] у площині майбутньої тріщини $\gamma = 0$ (разом із її серединною поверхнею) розподілимо пелену об'ємних сил

$$X_\alpha(\alpha) = 4k^2 \int\limits_0^\infty \xi A(\xi, q) J_1(\xi\alpha)\, d\xi \tag{1}$$

з довільною твірною функцією $A(\xi, q)$, які заникають на нескінченності. У цьому випадку компоненти $u_\alpha(\alpha, \gamma)$ і $u_\gamma(\alpha, \gamma)$ вектора пружного переміщення $\vec{u}$ у напрямку осей α і γ відповідно визначаються розв'язками рівнянь рівноваги

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = \delta(\gamma)X_\alpha(\alpha), \qquad k^2\partial_\gamma\theta - 2\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\omega_\beta) = 0 \tag{2}$$

стосовно першого інваріанта тензора деформації і компоненти вектора локального жорсткого повороту $\vec{\Omega} = 0{,}5\,\mathrm{rot}\,\vec{u}$

$$\theta = \mathrm{div}\,\vec{u} = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\alpha) + \partial_\gamma u_\gamma, \qquad 2\omega_\beta = (\mathrm{rot}\,\vec{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma \tag{3}$$

і подаються інтегралами Ганкеля

$$u_\alpha(\alpha,\gamma) = -(k^2+1)\int\limits_0^\infty A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_1(\xi\alpha)\,d\xi + (k^2-1)|\gamma|\int\limits_0^\infty \xi A(\xi,q)\times$$
$$\times \exp -\xi|\gamma| J_1(\xi\alpha)\,d\xi, \tag{4}$$
$$u_\gamma(\alpha,\gamma) = (k^2-1)|\gamma|\int\limits_0^\infty \xi A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_0(\xi\alpha)\,d\xi.$$

За відомими компонентами (4) вектора пружного переміщення, співвідношеннями (3) та законом Гука обчислимо характеристики напружено-деформованого стану:

$$\theta(\alpha,\gamma) = -2\int\limits_0^\infty \xi A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_0(\xi\alpha)\,d\xi,$$
$$\omega_\beta(\alpha,\gamma) = k^2\operatorname{sgn}\gamma\int\limits_0^\infty \xi A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_1(\xi\alpha)\,d\xi, \tag{5}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu\times$$
$$\times\left\{\int\limits_0^\infty \xi A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_0(\xi\alpha)\,d\xi - (k^2-1)\int\limits_0^\infty \xi^2 A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_0(\xi\alpha)\,d\xi\right\},$$
$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu\times \tag{6}$$
$$\times\left\{\operatorname{sgn}\gamma\int\limits_0^\infty k^2 A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_1(\xi\alpha)\,d\xi - (k^2-1)\gamma\int\limits_0^\infty \xi^2 A(\xi,q)\exp -\xi|\gamma| J_1(\xi\alpha)\,d\xi\right\}.$$

У рівняннях (2) і поданнях (4)–(6) $k^2 = 2(l-\nu)/(l-2\nu)$, ν — коефіцієнт Пуассона.

Отже, відповідно до подань (5) та (6) компонента $\omega_\beta(\alpha,\gamma)$ вектора локального жорсткого повороту $\vec{\Omega}$ і дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma)$ мають стрибки під час переходу через площину $\gamma = 0$, що є механічним проявом внутрішнього межового шару, а розподілена пелена об'ємних сил $X_\alpha(\alpha)(1)$ є механізмом його реалізації, його механічною, а відтак, і математичною моделлю.

2. Нехай під дією зовнішнього нормального навантаження береги дискової тріщини розходяться і перестають контактувати. Задача полягає в знаходженні такої об'ємної сили $X_\alpha(\alpha)(1)$, яка забезпечує відсутність розкриття тріщини, її механічне "заліковування" при довільно заданому, симетричному відносно осі α розподілі нормальних напружень на її поверхнях. Отже, маємо крайові умови:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\pm 0) = -\sigma^0_{\gamma\gamma} f(\alpha^2) \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant 1),$$
$$u_\gamma(\alpha,\pm 0) = 0 \qquad (0\leqslant\alpha<\infty), \tag{7}$$

які, з погляду класичної теорії пружності, є некоректними, оскільки стосуються одночасного задання однойменних складових векторів напруження і переміщення. Оскільки подання (4) автоматично забезпечує виконання другої умови (7), то відповідно до виразу (6) і першої умови (7) для визначення функції $A(\xi, q)$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int\limits_0^\infty \xi A(\xi, q) J_0(\xi\alpha)\, d\xi = -\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^0}{2\mu} f(\alpha^2) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1), \tag{8}$$

розв'язок якого подамо узагальненим рядом Неймана [3]

$$\xi A(\xi, q) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n-q+1}(\xi)}{\xi^q}. \tag{9}$$

Ряд (9) підставимо в інтегральне рівняння (8) та обчислимо розривний інтеграл Вебера–Шафхейтліна [4] і в результаті одержимо рівняння для визначення коефіцієнтів a_n:

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n-q+1) F(n-q+1; -n; 1; \alpha^2)}{2^q \Gamma(n+1)} = -\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^0}{2\mu} f(\alpha^2) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{10}$$

Оскільки $F(n-q+1; -n; 1; \alpha^2)$ і є поліномами Якобі, то ряд у лівій частині (10) стосовно коефіцієнтів a_n є рядом за поліномами Якобі [4] з аргументом $(1-2\alpha^2)$, які утворюють повну і ортогональну систему функцій на проміжку $[0, 1]$, то коефіцієнти a_n існують при довільній неперервній функції $f(\alpha^2)$ та обчислюються за формулою ортогональності.

За відомими коефіцієнтами a_n і поданням (1) знайдемо розподіл об'ємної сили $X_\alpha(\alpha)$, яка забезпечує нерозкриття тріщини при заданих на її берегах нормальних напруженнях:

$$X_\alpha(\alpha) = 4k^2 \sum_{n=0}^\infty a_n \int\limits_0^\infty \frac{J_{2n-q+1}(\xi)}{\xi^q} J_1(\xi\alpha)\, d\xi.$$

Обчислення розривного інтеграла Вебера–Шафхейтліна дає в області $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$X_\alpha(\alpha) = 4k^2 \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n-q+1{,}5)\alpha}{2^q \Gamma(n+0{,}5)} F(n-q+1{,}5; -n+0{,}5; 2; \alpha^2) \tag{11}$$

і в області $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$ –

$$X_\alpha(\alpha) = 4k^2 \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\Gamma(n-q+1{,}5) F(n-q+1{,}5; -n+0{,}5; 2n-q+2; \alpha^{-2})}{2^q \Gamma(2n-q+2)\Gamma(-n+q+0{,}5)\alpha^{2n-2q+2}}. \tag{12}$$

Отже, відповідно до подань (11) і (12), об'ємна сила $X_\alpha(\alpha)$ має різні, залежні від параметра q аналітичні вирази в областях $0 \leqslant \alpha < 1$ і $1 \leqslant \alpha < \infty$. Оскільки ці вирази у точці $\alpha = 1$ можуть давати різні значення, то будемо вимагати, щоб

$$\lim_{\alpha \to 1-0} X_\alpha(\alpha) = \lim_{\alpha \to 1+0} X_\alpha(\alpha), \qquad \lim_{\alpha \to \infty} X_\alpha(\alpha) = 0. \tag{13}$$

Відзначимо, що при виконанні умов (13) усі характеристики напружено-деформованого стану також будуть неперервними на фронті тріщини і заникатимуть на нескінченності. Оскільки гіпергеометрична функція Гаусса $F(a, b, c; x^2)$, яка входить у вирази (11) і (12), є неперервною в точці $x = 1$ при умові $c - a - b > 0$, то умови (13) будуть виконуватися, якщо параметр q обмежений нерівністю

$$0 < q < 0{,}5. \tag{14}$$

Тепер за поданнями (4)–(6) і відомою твірною функцією $A(\xi, q)$ можна обчислити усі характеристики напружено-деформованого стану у середовищі із "залікованою" дисковою щілиною, який зумовлений пеленою об'ємних сил (11) і (12). При цьому при виконанні нерівності (14) усі характеристики будуть неперервними на фронті тріщини і заникатимуть на нескінченності. Зазначимо, що є справедливою рівність:

$$X_\alpha(\alpha) = 4|\omega_\beta(\alpha, \pm 0)| = 2\mu^{-1}|\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)|, \tag{15}$$

яка є наслідком співвідношень (1), (5), (6) і простими залежностями пов'язує об'ємну силу $X_\alpha(\alpha)$, компоненту $\omega_\beta(\alpha, \pm 0)$ вектора $\vec{\Omega}$ і дотичне напруження $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)$.

4. Якщо припустити, що поза межами щілини межовий шар відсутній (дотичні напруження нульові), то умова $X_\alpha(\alpha) = 0$ в області $1 \leqslant \alpha < \infty$ буде виконуватися, якщо параметр $q = -0{,}5$. Тоді на проміжку $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ за поданням (11) виявимо для розподіленої тут масової сили

$$X_\alpha(\alpha) = 4k\sqrt{2}k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)\alpha}{\Gamma(n+0{,}5)} F(n+2; -n+0{,}5; 2; \alpha^2) =$$
$$= \frac{4k\sqrt{2}k^2\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)\alpha}{\Gamma(n+0{,}5)} F(-n; n+1{,}5; 2; \alpha^2)$$

класичну кореневу особливість. У відповідності з рівністю (15) компонента $\omega_\beta(\alpha, \pm 0)$ вектора також необмежено $\vec{\Omega}$ зростає, що суперечить гіпотезі суцільності.

1. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 4. – С. 17–33.
2. *Трусделл К.* Первоначальний курс механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.
3. *Галазюк В. А.* Обмежений розв'язок крайової задачі про напружено-деформований стан пружного тіла з абсолютно жорстким дископодібним включенням нульової товщини // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 23–27.
4. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 19.03.2013

В. А. Галазюк, Г. Т. Сулим

Напряженно-деформированное состояние неограниченной среды с "залеченной" дисковой трещиной

С применением концепции граничных слоев решена некорректная задача определения параметров внутреннего граничного слоя в плоскости трещины, который при произвольно заданных нормальных напряжениях на его поверхностях обеспечивает их полный контакт без дополнительного давления.

V. A. Halazyuk, G. T. Sulym

Stress-strain state of the unlimited medium with a “healed” disc crack

Using the conception of internal boundary layers, the ill-posed problem of determining the parameters of an internal boundary layer in the crack plane is solved. The boundary layer provides the full contact without additional pressure by arbitrarily specified normal stresses on the crack surface.