

Н. И. Ободан, В. А. Громов

Закритическая деформация и критические нагрузки для цилиндрической оболочки с расслоением по толщине

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Рассматривается структура ветвления решений нелинейной краевой задачи теории тонкостенных оболочек для случая цилиндрической оболочки с областью расслоения. Установлено существование ветвей решения, отвечающих совместной и отдельной деформации слоев в области расслоения.

При исследовании процесса деформирования и оценке несущей способности цилиндрических оболочек с дефектами в виде расслоения возникает задача о “выщелкивании” слоя, которое является “инициатором” дальнейшей общей потери устойчивости системы; при этом возможен старт роста дефекта вследствие “выщелкивания” с увеличением области дефекта. Современные исследования в этом направлении [1–5] посвящены анализу распределения напряжения по толщине пакета, возможному росту расслоения, при этом подобласти и условия контакта в области расслоения описываются априори гипотезами типа Винклера; нелинейное поведение исследуется вплоть до локальной потери устойчивости.

1. Исследуется деформация цилиндрической оболочки радиусом R , длиной L , толщиной h , имеющей прямоугольную в плане область расслоения, характеризующуюся толщинами верхнего и нижнего слоев — h_1 и h_2 соответственно; оболочка подвергнута действию равномерного внешнего давления; торцы оболочки закреплены; x_1, x_2 соответствуют продольному и окружному направлениям соответственно. В области расслоения ($\Omega_d = \{x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max}, i = 1, 2\}$) предполагается существование прямоугольных в плане под областей нормального контакта и раздельного деформирования слоев $\Omega_j = \{x_{i,\min}^j \leq x_i \leq x_{i,\max}^j, i = 1, 2\}, j = \overline{1, S}$: здесь $x_{i,\min}^j, x_{i,\max}^j$ — границы j -й подобласти раздельного деформирования. Рассматривается вариационная постановка нелинейной краевой задачи теории оболочек, обобщенная на случай многослойности (с использованием гипотезы ломаной нормали) [2], являющаяся вариационной задачей с неизвестной границей под областей нормального контакта и раздельного деформирования слоев. В качестве независимо варьируемых функций используются отыскиваемые в рамках итерационного процесса функции одной переменной $U_s^{(i_1)}(x_1)$ и $U_s^{(i_2)}(x_2)$, такие, что $U_s(x_1, x_2) = U_s^{(i_1)}(x_1)U_s^{(i_2)}(x_2)$, где $i_1 = i, i_2 = i - 1$ для четных i (номер итерации), $i_1 = i - 1, i_2 = i$ — для нечетных; здесь $U(x_1, x_2) = \{U_s(x_1, x_2), s = \overline{1, K}\}$ — вектор неизвестных функций задачи. Из условий стационарности соответствующего функционала следуют: системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $U_s^{(i_1)}(x_1)$ ($U_s^{(i_2)}(x_2)$) с коэффициентами, содержащими интегралы от функций $U_s^{(i_2)}(x_2)$ ($U_s^{(i_1)}(x_1)$) и их производных (1); на границах неповрежденной части оболочки и прилегающей к ней подобласти контакта — интегральные условия совместности по обобщенным по соответствующей границе деформациям (2), интегральные условия равновесия по обобщенным тангенциальным усилиям и изгибающим

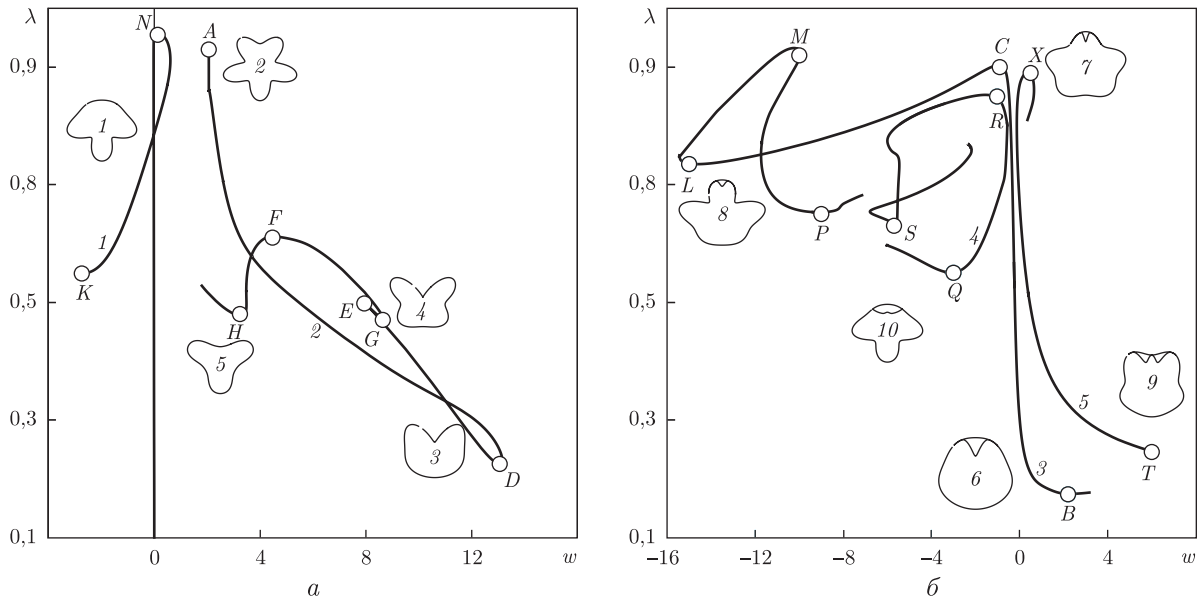


Рис. 1. Структура ветвления нелинейной краевой задачи: *a* — ветви, которым соответствуют формы с полным контактом слоев в зоне расслоения; *b* — формы с чередованием подобластей полного контакта и раздельной деформации слоев

моментам (3); на границах подобластей контакта и раздельного деформирования слоев — условия (2), (3), интегральные условия равновесия по обобщенным перерезывающим силам, сформулированные с учетом скачков по обобщенным перерезывающим силам на указанных границах (4); внутри и на границах подобластей нормального контакта слоев — условие непроникновения слоев (5); условия трансверсальности, для определения границ подобластей (6); на торцах оболочки — граничные условия (7). Решения одномерных задач строятся итеративно, сведением на каждой итерации краевой задачи к задаче Коши методом Ньютона, в число неизвестных задачи входят координаты границы; для обеспечения сходимости алгоритма использовался метод продолжения по параметру.

2. Указанный подход был применен для анализа структуры ветвления решений задачи (1)–(7) для условий шарнирного опирания на торцах оболочки. Установлено, что ветви решения задачи (1)–(7) в данном случае могут быть разделены на две группы в соответствии с характером деформации слоев оболочки в области расслоения. К первой группе ветвей относятся ветви, характеризующиеся полным нормальным контактом слоев в области расслоения, ко второй — характеризующиеся чередованием подобластей полного контакта и раздельной деформации слоев. На рис. 1 представлена характерная структура ветвления анализируемой нелинейной краевой задачи (для случая $L/R = 4$, $R/h = 150$, $\eta_d = h_1/h = 0,1$, $\Omega_d = \{0 \leq x_1 \leq L/R, -\pi/6 \leq x_2 \leq \pi/6\}$). Здесь по оси абсцисс отложен характерный безразмерный прогиб, по оси ординат — величина параметра нагружения (отношение значения действующей нагрузки к величине критической нагрузки, полученной для той же оболочки без области расслоения). Ветви решения с совместной деформацией слоев подобны по топологической структуре и фиксируемым на них формам деформации закритическим ветвям решения для случая оболочки без расслоения: данная часть структуры ветвления может рассматриваться как разрушение бифуркационной картины для случая монолитной оболочки вследствие снижения жесткости в облас-

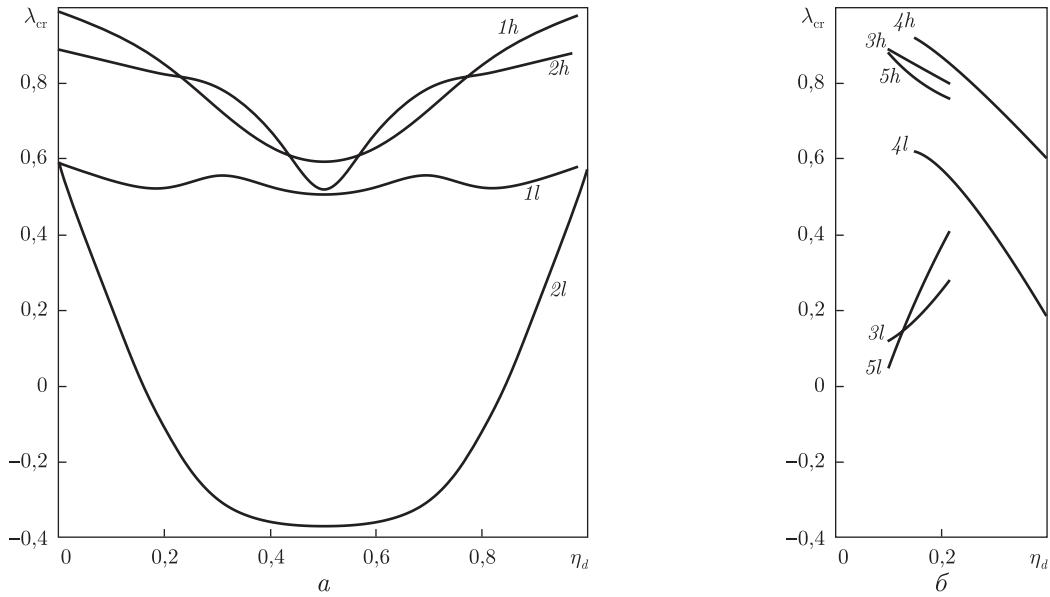


Рис. 2. Зависимость величины параметра нагружения для верхней и нижней особых точек ветвей решения от относительной толщины нижнего слоя в области расслоения: *а* — формы с полным контактом слоев; *б* — формы с чередованием подобластей полного контакта и раздельной деформации

ти расслоения. В случае раздельного деформирования фиксируются как формы с двумя подобластями контакта слоев, расположенными по краям области расслоения (“выщелкивание” нижнего слоя, $\Omega_1: x_{1,\min}^{(1)} \approx 0; x_{1,\max}^{(1)} \approx L/R; x_{2,\min}^{(1)} = -\pi/6 + \varphi_c; x_{2,\max}^{(1)} = \pi/6 - \varphi_c; \varphi_c \approx 0,01$) — ветви 3 и 4, так и формы с тремя подобластями контакта — двумя подобластями раздельного деформирования слоев ($\Omega_j: x_{1,\min}^{(j)} \approx 0; x_{1,\max}^{(j)} \approx L/R; j = 1, 2; \Omega_1: x_{2,\min}^{(1)} = -\pi/6 + \varphi_c; x_{2,\max}^{(1)} = -\varphi_c; \Omega_2: x_{2,\min}^{(2)} = \varphi_c; \Omega_2: x_{2,\min}^{(2)} = \pi/6 - \varphi_c; \varphi_c \approx 0,01$) — ветвь 5.

3. Широкомасштабный численный эксперимент для различных геометрических параметров показал, что в зависимости от геометрических характеристик как самой оболочки, так и области расслоения для каждой ветви первой группы может существовать ветвь с аналогичными формами деформации, но с раздельным деформированием слоев. При наличии области расслоения в виде полосы размеры подобластей контакта и раздельного деформирования слоев в продольном направлении близки к длине полосы; для случая одной подобласти раздельного деформирования слоев размеры указанной подобласти в окружном направлении либо практически совпадают с размерами области расслоения в данном направлении, либо, если размеры области расслоения в окружном направлении превышают некоторый предельный угол φ^* , равны данному углу и не зависят от размеров области расслоения. Величина φ^* определяется толщиной нижнего слоя.

На рис. 2 представлена характерная зависимость значений параметра нагружения, соответствующих верхним (*h*) и нижним (*l*) особым точкам рассмотренных выше ветвей решения, от параметра относительной толщины нижнего слоя оболочки в области расслоения η_d . Нумерация зависимости на рис. 2 и 3 соответствует номерам кривых на рис. 1. На рис. 3 для данных ветвей представлены указанные величины в функции от размеров области расслоения в окружном направлении $\varphi_0 = x_{2,\max} - x_{2,\min}$. Проведенные исследования показывают, что наличие зоны расслоения по толщине оболочки существенно изменяет

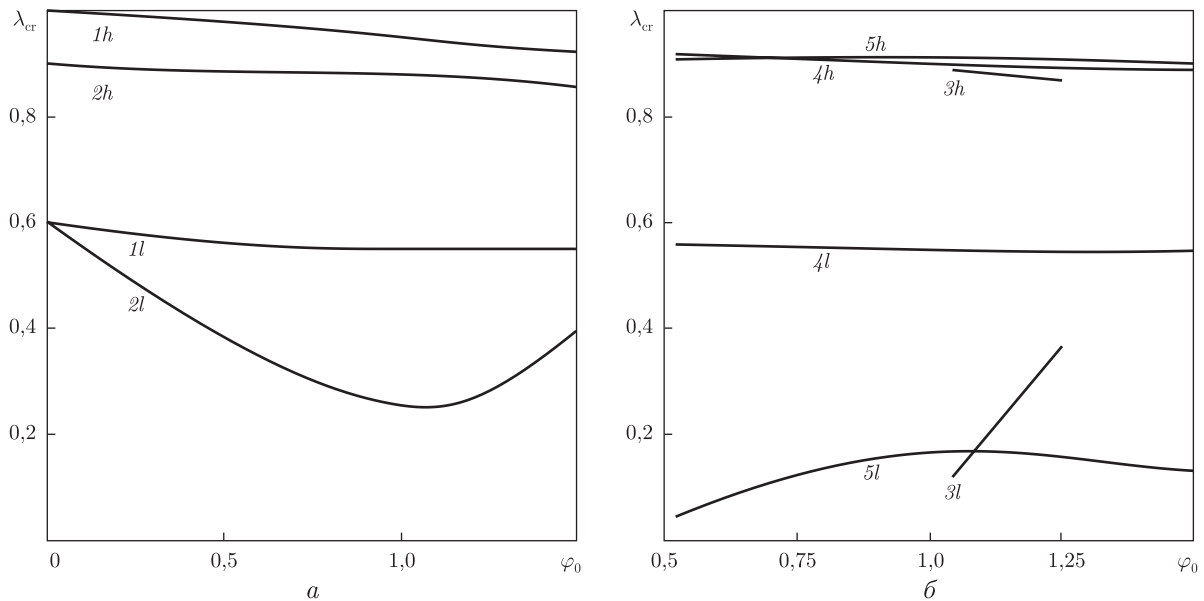


Рис. 3. Зависимость величины параметра нагружения для верхней и нижней особых точек ветвей решения от центрального угла (в радианах) области расслоения: *a* — формы с полным контактом слоев; *b* — формы с чередованием подобластей полного контакта и раздельной деформации

критические нагрузки и характер деформирования; при этом бифуркационная картина существенно отличается от осесимметричного случая.

1. Liew K. M., Zhao X., Ferreira A. J. M. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells // Composite Structures. – 2011. – **93**. – P. 2031. – 2041.
2. Tian Y., Fu Y., Mao Y. Nonlinear static/dynamic analysis for elasto-plastic laminated plates with interfacial damage evolution // Composite Structures. – 2010. – **93**. – P. 103–112.
3. Turon A., Camanho P. P., Costa J., Renart J. Accurate simulation of delamination growth under mixed-mode loading using cohesive elements: Definition of interlaminar strengths and elastic stiffness // Composite Structures. – 2010. – **92**. – P. 1857–1864.
4. Моссаковский В. И., Ободан Н. И., Железко И. П. Нелинейная модель деформирования оболочек с расслоениями // Докл. АН СССР. – 1985. – **282**, № 5. – С. 1070–1073.
5. Nagashima T., Suemasu H. X-FEM analyses of a composite shell structure with a delamination // Computers and Structures. – 2010. – **88**. – P. 549–557.

Днепропетровский национальный университет
им. Олесь Гончара

Поступило в редакцию 22.01.2013

Н. І. Ободан, В. О. Громов

Закритична деформація та критичні навантаження для циліндричної оболонки з розшаруванням за товщиною

Розглянуто структуру розгалуження розв'язків нелінійної крайової задачі теорії тонкостінних оболонок для випадку циліндричної оболонки з областю розшарування. Встановлено наявність гілок розв'язку, що відповідають спільній та окремій деформації шарів оболонки в області розшарування.

N. I. Obodan, V. A. Gromov

Postcritical deformation and critical loads for a cylindrical shell with delamination over the thickness

The branching structure for the solutions of a non-linear boundary-value problem of the thin-walled shell theory for a cylindrical shell with a delamination area is considered. Solution branches corresponding to joint and separate deformations of layers in the delamination area are analyzed.