УДК 519.21+517.9

Академік НАН України **М. О. Перестюк, Ю. С. Мішура,**
Г. М. Шевченко

Про розподіл локального часу однорідного дифузійного процесу

Знайдено ймовірнісний розподіл локального часу однорідного транзієнтного дифузійного процесу. Для цього розглянуто диференціальне рівняння другого порядку, породжене генератором процесу, й аналітичними методами встановлено властивості його монотонних розв'язків як функцій параметра. Одночасно використано ймовірнісне зображення монотонних розв'язків цього рівняння. Поєднання методів теорії диференціальних рівнянь і теорії випадкових процесів дозволило знайти параметр експоненційного розподілу локального часу.

Розглянемо сім'ю однорідних одновимірних дифузійних процесів $\{X_t^x, t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}\}$, заданих на стандартному ймовірнісному просторі з фільтрацією $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P\}$ за допомогою стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + a(X_t^x)\,dW_t, \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$X_0^x = x \in \mathbb{R}$ — початкове значення, $\{W_t, t \geqslant 0\}$ — стандартний вінерівський процес. Розглядаючи ті об'єкти, для яких початкове значення розв'язку не відіграє ролі, відповідний процес позначатимемо X. Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють будь-які умови існування слабкого розв'язку, а також є неперервними за $x \in \mathbb{R}$, і $a(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Із сім'єю процесів $\{X_t^x, t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}\}$ пов'яжемо такі об'єкти:

1. Для $f \in C^2(\mathbb{R})$ позначимо генератор дифузійного процесу X через

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{a^2(x)}{2} f''(x) + b(x)f'(x).$$

2. Визначимо функції

$$\varphi(x_0, x) = \exp\left\{-2\int\limits_{x_0}^{z} \frac{b(u)}{a^2(u)}du\right\}, \quad \Phi(x_0, x) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(x_0, z)\,dz, \quad x_0, x \in \mathbb{R}\bigcup\{-\infty, +\infty\}.$$

Зауважимо, що при кожному фіксованому $x_0 \in \mathbb{R}$ функція $\Phi(x_0, \cdot)$ є розв'язком однорідного диференціального рівняння другого порядку $\mathcal{L}\Phi(x_0, \cdot) = 0$.

3. Для x, $y \in \mathbb{R}$ нехай $\tau_y^x = \inf\{t \geqslant 0, X_t^x = y\}$ — момент першого попадання в точку y, а для $x \in (a, b)$ $\tau_{a,b}^x = \inf\{t \geqslant 0, X_t^x \notin (a, b)\} = \tau_a^x \wedge \tau_b^x$ — момент виходу з інтервалу (a, b). (Вважатимемо, що $\inf \varnothing = +\infty$.)

4. Визначимо нормований коефіцієнтом дифузії a локальний час перебування процесу X^x в точці $y \in \mathbb{R}$ на відрізку $[0, t]$ (множник $a^2(y)$ включено згідно із загальним визначенням Мейєра–Танаки локальних часів семімартингалів [1]):

$$L_t^x(y) = a^2(y) \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{I}\{|X_s^x - y| \leqslant \varepsilon\}\,ds,$$

де границя майже напевно існує і визначає неперервний неспадний випадковий процес $\{L_t^x(y), t \geqslant 0\}$ для всіх x, $y \in \mathbb{R}$. Локальний час перебування на всьому проміжку $[0, +\infty)$ позначимо $L_\infty^x(y)$.

Метою роботи є визначення ймовірнісного розподілу локального часу L_∞^x. Зазначимо, що дане питання розглядалося в роботах [1, 2], проте параметри розподілу в них не було визначено явно, а лише як границю певних функціоналів від розв'язків диференціальних рівнянь, див. формулу (4).

Згідно з [3, 4], у випадку, коли $\Phi(x, +\infty) = -\Phi(x, -\infty) = +\infty$ для деякого $x \in \mathbb{R}$ (а тоді ці рівності мають місце для всіх $x \in \mathbb{R}$), дифузійний процес X є рекурентним, тобто $P\{\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} X_t^x = +\infty, \underline{\lim\limits_{t\to+\infty}} X_t^x = -\infty\} = 1$, і локальний час $L_\infty^x(y) = +\infty$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ м. н. Поведінка процесу, оберненого до процесу локального часу, вивчалася в рекурентному випадку в роботах [1, 5, 6].

Тому розглядаємо лише випадок транзієнтного процесу X, коли хоча б один з інтегралів $\Phi(x_0, +\infty)$, або $\Phi(-\infty, x_0)$ є скінченним (поведінку траєкторій X у цьому випадку описано в [3, теорема 1, с. 119] та [7, теорема 3.1, с. 351].

Далі, зауважимо, що достатньо розглянути випадок $x = y$. Справді, внаслідок строгої марковської властивості процесу X, для довільного $l \geqslant 0$

$$P(L_\infty^x(y) > l) = P(L_\infty^y(y) > l) P(\tau_y^x < +\infty).$$

Ймовірність $P(\tau_y^x < +\infty) = 1 - P(\tau_y^x = +\infty)$ можна визначити, користуючись відомою формулою (див. [8, с. 500]): для $x \in (a, b)$

$$P(X_{\tau_{a,b}}^x = b) = \frac{\Phi(a, x)}{\Phi(a, b)}.$$

Тоді шукане значення ймовірності залежить від співвідношення між x та y та від значення інтегралів $\Phi(x, +\infty)$ та $\Phi(x, -\infty)$. А саме якщо $x > y$, то

$$P(\tau_y^x = +\infty) = \lim_{a\to+\infty} P(X_{\tau_{y,a}}^x = a) = \lim_{a\to+\infty} \frac{\Phi(y, x)}{\Phi(y, a)},$$

тому при $x > y$

$$P(\tau_y^x = +\infty) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(y, x)}{\Phi(y, +\infty)}, & \Phi(x, +\infty) < +\infty, \\ 0, & \Phi(x, +\infty) = +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

При $x < y$

$$P(\tau_y^x = +\infty) = \lim_{a\to-\infty} (1 - P(X_{\tau_{a,y}}^x = y)) = \lim_{a\to-\infty} \frac{\Phi(a, y) - \Phi(a, x)}{\Phi(a, y)} =$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{\phi(a, x)\Phi(x, y)}{-\phi(a, y)\Phi(y, a)} = \lim_{a\to-\infty} \frac{-\phi(a, x)\phi(x, y)\Phi(y, x)}{-\phi(a, y)\Phi(y, a)} = \lim_{a\to-\infty} \frac{\Phi(y, x)}{\Phi(y, a)},$$

тому

$$P(\tau_y^x = +\infty) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(y, x)}{\Phi(y, -\infty)}, & -\Phi(x, -\infty) < +\infty, \\ 0, & -\Phi(x, -\infty) = +\infty. \end{cases} \tag{3}$$

Отже, справді достатньо знати розподіли величин $L_\infty^x(x)$. Для визначення останніх використаємо такі факти.

1. Згідно з [1, теорема 1], $P(L_\infty^x(x) > l) = \exp(-l\psi_x(0))$, де

$$\psi_x(0) = \psi^{x,+}(0) + \psi^{x,-}(0), \qquad \psi^{x,\pm}(0) = \pm\frac{1}{2}\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{y'_{\lambda,\pm}(x)}{y_{\lambda,\pm}(x)}, \tag{4}$$

функції $y_{\lambda,+}$ та $y_{\lambda,-}$ є відповідно зростаючим та спадним розв'язком рівняння ($\lambda > 0$, фіксоване)

$$\mathcal{L}y = \lambda y. \tag{5}$$

2. Згідно з [4], функції $y_{\lambda,+}$ та $y_{\lambda,-}$ мають імовірнісні зображення

$$y_{\lambda,+}(x) = \begin{cases} Ee^{-\lambda\tau_0^x}, & x < 0, \\ (Ee^{-\lambda\tau_x^0})^{-1}, & x \geqslant 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$y_{\lambda,-}(x) = \begin{cases} Ee^{-\lambda\tau_0^x}, & x \geqslant 0, \\ (Ee^{-\lambda\tau_x^0})^{-1}, & x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

При цьому ми вважаємо, що $e^{-\lambda t} = 0$ при $t = +\infty$, $\lambda > 0$.

3. Будь-який розв'язок $y_\lambda(x)$ рівняння (5) допускає інтегральне зображення

$$y_\lambda(x) = C_1(\lambda) + C_2(\lambda)\Phi(x_0, x) + 2\lambda\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\Phi(s,x)}{a^2(s)}y_\lambda(s)\,ds, \tag{8}$$

$$y'_\lambda(x) = C_2(\lambda)\varphi(x_0, x) + 2\lambda\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\varphi(s,x)}{a^2(s)}y_\lambda(s)\,ds. \tag{9}$$

Теорема 1. *Має місце формула*

$$\psi_x(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Phi(x,+\infty)} - \frac{1}{\Phi(x,-\infty)}\right), \tag{10}$$

де $\dfrac{1}{\infty} := 0$.

Доведення. Нам треба знайти границі в рівностях (4). З цією метою спочатку звернемося до зображення (8), в яке підставимо $y_{\lambda,+}(x)$ і покладемо $x_0 = 0$. Оскільки з (6) випливає, що $y_{\lambda,+}(0) = 1$, то з (8) та (9) —

$$y_{\lambda,+}(x) = 1 + c_2(\lambda)\Phi(0,x) + 2\lambda\int\limits_0^x\frac{\Phi(s,x)}{a^2(s)}y_{\lambda,+}(s)\,ds \tag{11}$$

та

$$y'_{\lambda,+}(x) = c_2(\lambda)\varphi(0,x) + 2\lambda\int\limits_0^x\frac{\varphi(s,x)}{a^2(s)}y_{\lambda,+}(s)\,ds. \tag{12}$$

Підставимо в (12) $x = 0$. Оскільки $\phi(0,0) = 1$, то $y'_{\lambda,+}(0) = c_2(\lambda)$, отже, (11) і (12) перетворяться на

$$y_{\lambda,+}(x) = 1 + y'_{\lambda,+}(0)\Phi(0,x) + 2\lambda \int\limits_0^x \frac{\Phi(s,x)}{a^2(s)} y_{\lambda,+}(s)\,ds \tag{13}$$

та

$$y'_{\lambda,+}(x) = y'_{\lambda,+}(0)\varphi(0,x) + 2\lambda \int\limits_0^x \frac{\varphi(s,x)}{a^2(s)} y_{\lambda,+} ds. \tag{14}$$

Таким чином, треба перейти до границі при $\lambda \to 0$ в (13) та (14) при фіксованому $x \in \mathbb{R}$. Спочатку перейдемо до границі в інтегралах. Нехай $x > 0$ фіксоване. Тоді обидві підінтегральні функції додатні, підінтегральні функції $\Phi(s,x)/a^2(s)$ та $\varphi(s,x)/a^2(s)$ обмежені. Оскільки $\lambda \downarrow 0$, то можна вважати, що $\lambda \in (0,1]$. При $x > 0$ з (6) видно, що $y_{\lambda,+}(x)$ зростає за λ, значить, $0 \leqslant y_{\lambda,+}(s) \leqslant (E_0 e^{-\tau_s^0})^{-1}$, і ця функція обмежена при $s \in [0,x]$. Отже,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda \int\limits_0^x \frac{\Phi(s,x)}{a^2(s)} y_{\lambda,+}(s)\,ds = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda \int\limits_0^x \frac{\varphi(s,x)}{a^2(s)} y_{\lambda,+}(s)\,ds = 0.$$

Той самий висновок можна зробити і при $x < 0$, якщо поміняти знак при $\Phi(s,x)$ і зазначити, що $0 \leqslant y_{\lambda,+}(s) \leqslant 1$ при $s < 0$. Аналогічно розглядаються границі відповідних інтегралів для спадного розв'язку $y_{\lambda,-}(x)$, і вони також дорівнюють нулю. Тепер знайдемо $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,+}(0)$. Для цього спочатку зауважимо, що з вигляду зображень (6), (7) випливає, що при кожному $x \in \mathbb{R}$ $y_{\lambda,+}(x)$ і $y_{\lambda,-}(x)$ є неперервними функціями λ. Тому в (13) ліва частина й інтеграл в правій частині неперервні за λ. Отже, і $y'_{\lambda,+}(0)$, $(y_{\lambda,-})'(0)$ неперервні за λ. Тому границі $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,\pm}(0)$ дорівнюють значенням відповідних похідних у нулі:

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,\pm}(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{y_{\lambda,\pm}(x) - 1}{x}\bigg|_{\lambda=0}\right).$$

Тепер, при $\lambda > 0$ мають місце рівності $E(e^{-\lambda\tau_0^x} - 1) = -P\{\tau_0^x = +\infty\} + E(e^{-\lambda\tau_0^x} - 1)\mathbb{I}\{\tau_0^x < < +\infty\}$, отже, $E(e^{-\lambda\tau_0^x} - 1)\big|_{\lambda=0} = -P\{\tau_0^x = +\infty\}$. Значить,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,+}(0) = -\lim_{x\uparrow 0} \frac{P\{\tau_0^x = +\infty\}}{x},$$

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,-}(0) = -\lim_{x\downarrow 0} \frac{P\{\tau_0^x = +\infty\}}{x}.$$

Згідно з формулами (2), (3) маємо

$$P(\tau_0^x = +\infty) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(0,x)}{\Phi(0,-\infty)}, & -\Phi(0,-\infty) < +\infty, \\ 0, & -\Phi(0,-\infty) = +\infty \end{cases}$$

при $x < 0$ та

$$P(\tau_0^x = +\infty) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(0,x)}{\Phi(0,+\infty)}, & \Phi(0,+\infty) < +\infty, \\ 0, & \Phi(0,+\infty) = +\infty \end{cases}$$

при $x > 0$. Зауважимо, що

$$\frac{\Phi(0,x)}{x} = \frac{\Phi(0,x) - \Phi(0,0)}{x - 0} \to \Phi'_x(0,x)|_{x=0} = \varphi(0,0) = 1, \qquad x \to 0.$$

Таким чином,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,+}(0) = -\frac{1}{\Phi(0,-\infty)}, \qquad \lim_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,-}(0) = -\frac{1}{\Phi(0,+\infty)}.$$

Підставимо ці границі в (13) та (14) і знайдемо, використовуючи властивості функцій Φ та φ, що

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} y_{\lambda,+}(x) = \begin{cases} \dfrac{\phi(0,x)\Phi(x,-\infty)}{\Phi(0,-\infty)}, & -\Phi(0,-\infty) < +\infty, \\ 1, & -\Phi(0,-\infty) = +\infty; \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} y_{\lambda,-}(x) = \begin{cases} \dfrac{\phi(0,x)\Phi(x,+\infty)}{\Phi(0,+\infty)}, & \Phi(0,+\infty) < +\infty, \\ 1, & \Phi(0,+\infty) = +\infty; \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,+}(x) = -\frac{\phi(0,x)}{\Phi(0,-\infty)}, \qquad \lim_{\lambda\downarrow 0} y'_{\lambda,-}(x) = -\frac{\phi(0,x)}{\Phi(0,+\infty)}.$$

Доведення теореми завершується застосуванням формули (4).

Наслідок 1. *1. Якщо має місце будь-який з випадків: $x = y$; $x < y$ та $-\Phi(0,-\infty) = +\infty$; $x > y$ та $\Phi(0,+\infty) = +\infty$, то локальний час $L_\infty^x(y)$ має експоненційний розподіл з параметром $\psi_y(0)$, що задається формулою (10).*

2. Якщо $x < y$ та $-\Phi(0,-\infty) < +\infty$, то локальний час $L_\infty^x(y)$ розподілений як $\kappa\xi$, де ξ має експоненційний розподіл з параметром $\psi_y(0)$, κ — незалежна від ξ бернуліївська випадкова величина з

$$P(\kappa = 0) = 1 - P(\kappa = 1) = \frac{\Phi(y,x)}{\Phi(y,-\infty)}.$$

3. Якщо $x > y$ та $\Phi(0,+\infty) < +\infty$, то локальний час $L_\infty^x(y)$ розподілений як $\kappa\xi$, де ξ має експоненційний розподіл з параметром $\psi_y(0)$, κ — незалежна від ξ бернуліївська випадкова величина з

$$P(\kappa = 0) = 1 - P(\kappa = 1) = \frac{\Phi(y,x)}{\Phi(y,+\infty)}.$$

Приклад 1. Нехай $a(x) \equiv a \neq 0$ та $b(x) \equiv b$ є сталими. Тоді $\varphi(x,y) = e^{-2b(y-x)/a^2}$, $\Phi(x,y) = \dfrac{a^2}{2b}(1 - e^{-2b(y-x)/a^2})$ при $b \neq 0$ та $\Phi(x,y) = y - x$ при $b = 0$. Тоді процес є транзієнтним тоді й тільки тоді, коли $b \neq 0$, причому при $b > 0$ $-\Phi(0,-\infty) = +\infty$, $\Phi(0,+\infty) < +\infty$; при $b < 0$ $-\Phi(0,-\infty) < +\infty$, $\Phi(0,+\infty) = +\infty$. Ці випадки є симетричними, тому розглянемо лише випадок $b > 0$.

Рівняння (5) є лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{a^2}{2}y''(x) + by'(x) = \lambda y(x),$$

загальний розв'язок якого

$$y(x) = C_1 \exp\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2+2a^2\lambda}}{a^2}x\right\} + C_2 \exp\left\{\frac{-b-\sqrt{b^2+2a^2\lambda}}{a^2}x\right\}.$$

Зростаючим та спадним розв'язком є відповідно

$$y_{\lambda,+}(x) = \exp\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2+2a^2\lambda}}{a^2}x\right\}, \qquad y_{\lambda,-}(x) = \exp\left\{\frac{-b-\sqrt{b^2+2a^2\lambda}}{a^2}x\right\}.$$

Тоді

$$\frac{y'_{\lambda,+}(x)}{y_{\lambda,+}(x)} = \frac{-b+\sqrt{b^2+2a^2\lambda}}{a^2} \to 0, \qquad \lambda \downarrow 0;$$

$$\frac{y'_{\lambda,-}(x)}{y_{\lambda,-}(x)} = \frac{-b-\sqrt{b^2+2a^2\lambda}}{a^2} \to -\frac{2b}{a^2}, \qquad \lambda \downarrow 0.$$

Отже, $\psi_x(0) = b/a^2$, що збігається з результатом теореми 1, оскільки в даному випадку

$$\psi_x(0) = \frac{1}{2\Phi(x,+\infty)} = \frac{1}{2a^2/2b} = \frac{b}{a^2}.$$

Таким чином, при $x \leqslant y$ локальний час $L^x_\infty(y)$ має експоненційний розподіл з параметром b/a^2, а при $x > y$ він розподілений як $\kappa\xi$, де ξ має експоненційний розподіл з параметром b/a^2, κ — незалежна від ξ бернуліївська випадкова величина з $P(\kappa = 1) = 1 - P(\kappa = 0) = e^{-2b(x-y)/a^2}$. Використовуючи властивості експоненційного розподілу, ці випадки можна об'єднати: $L^x_\infty(y) \overset{d}{=} (\xi - 2(x-y)_+)_+$, де $a_+ = a \vee 0$ — додатна частина a.

Приклад 2. Нехай $a(x) = \sqrt{x^2+1}$ та $b(x) = x$. Тоді $\varphi(x,y) = (x^2+1)/(y^2+1)$, $\Phi(x,y) = (1+x^2)(\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x)$. Бачимо, що процес є транзієнтним, причому $-\Phi(0,-\infty) = \Phi(0,\infty) = \pi/2 < \infty$.

Ми не будемо розв'язувати рівняння (5) й одразу перейдемо до визначення розподілу локального часу. За наслідком 1, локальний час $L^x_\infty(y)$ розподілений як $\kappa\xi$, де ξ має експоненційний розподіл з параметром

$$\psi_x(0) = \frac{1}{2\Phi(x,+\infty)} - \frac{1}{2\Phi(x,+\infty)} = \frac{1}{(1+x^2)(\pi - 2\operatorname{arctg} x)} - \frac{1}{(1+x^2)(\pi + 2\operatorname{arctg} x)} =$$
$$= \frac{4\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)(\pi^2 - 4\operatorname{arctg}^2 x)},$$

κ — незалежна від ξ бернуліївська випадкова величина з

$$P(\kappa = 1) = 1 - P(\kappa = 0) = \begin{cases} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\pi - 2\operatorname{arctg} y}, & x \geqslant y, \\[2ex] \dfrac{\pi + 2\operatorname{arctg} x}{\pi + 2\operatorname{arctg} y}, & x < y. \end{cases}$$

1. *Pitman I., Yor M.* Hitting, occupation and inverse local times of one-dimensional diffusions: martingale and excursion approaches // Bernoulli. – 2003. – **9**, No 1. – P. 1–24.
2. *Comtet A., Tourigny Y.* Excursions of diffusion processes and continued fractions // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. – 2011. – **47**, No 3. – P. 850–874.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 256 с.
4. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. – Москва: Мир, 1965. – 395 с.
5. *Salminen P., Vallois P., Yor M.* On the excursion theory for linear diffusions // Jap. J. Math. – 2007. – **2**, No 1. – P. 97–127.
6. *Salminen P., Vallois P.* On subexponentiality of the Lévy measure of the diffusion inverse local time; with applications to penalizations // Electron. Commun. Probab. – 2009. – **14**. – P. 1963–1991.
7. *Ватанабе С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – Москва: Мир, 1986. – 448 с.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 27.03.2013

Академик НАН Украины **Н. А. Перестюк, Ю. С. Мишура, Г. М. Шевченко**

О распределении локального времени однородного дифузионного процесса

Найдено вероятностное распределение локального времени однородного транзиентного дифузионного процесса. Для этого рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка, порожденное генератором процесса, и аналитическими методами установлены свойства его монотонных решений как функций параметра. Одновременно использовано вероятностное представление монотонных решений этого уравнения. Сочетание методов теории дифференциальных уравнений и теории случайных процессов позволило найти параметр экспоненциального распределения локального времени.

Academician of the NAS of Ukraine **M. O. Perestyuk, Yu. S. Mishura, G. M. Shevchenko**

On the distribution of a local time of a homogeneous diffusion process

The probabilistic distribution of the local time of a homogeneous transient diffusion process is found. To this end, a second order differential equation corresponding to the process generator is considered, and properties of its monotone solutions as functions of a parameter are established with the help of analytic tools. At the same time, a probabilistic representation of monotone solutions is used. Combining the techniques of differential equations theory and stochastic processes theory allowed us to identify the parameter of an exponential distribution of the local time.