УДК 517.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

О неустойчивости движения при интервальных начальных условиях

Исследуется система уравнений возмущенного движения общего вида при интервальных начальных условиях. Для этого класса систем уравнений прямым методом Ляпунова получены достаточные условия неустойчивости движения. В качестве примера рассматривается линейная система с неточными значениями параметров.

В данной работе исследуется задача о неустойчивости движения при интервальных начальных условиях. Это понятие неустойчивости близко к известному определению неустойчивости в смысле Ляпунова (см. [3]). При помощи прямого метода Ляпунова получены достаточные условия неустойчивости рассматриваемого типа. В качестве примера рассмотрена задача о неустойчивости движения при интервальных начальных условиях линейной системы с неточными параметрами.

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения при интервальных начальных условиях

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \tag{2}$$

где $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ — интервал начальных значений вектора состояний такой, что $0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, $f(t,x) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $f(t,0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

В данной работе предполагается, что движения системы, описываемые системой (1) при начальных условиях (2), определены при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Далее $X(t)$ обозначает множество траекторий системы (1), генерируемых интервальными начальными значениями $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, т. е.

$$X(t) = \left\{x(t)\colon \frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0,\ x_0 \in [\underline{x}_0,\ \overline{x}_0],\ t_0 \in [0, +\infty)\right\}. \tag{3}$$

Напомним, что для интервального вектора $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ норма вводится формулой

$$\|Y\| = \max(|Y_1|, \ldots, |Y_n|),$$

где $|Y_i| = \max(|\underline{y}_i|, |\overline{y}_i|)$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приведем определения, необходимые для дальнейшего изложения результатов.

Определение 1. Нулевое решение системы (1) при интервальных начальных значениях (2) неустойчиво в смысле Ляпунова, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ при любом $\delta > 0$ существует $\widetilde{x}_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ такое, что при $(\widetilde{x}_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|\widetilde{x}_0\| < \delta)$ неравенство

$$(x(t) \in X(t)) \bigcap (\|x(t, t_0, \widetilde{x}_0)\| < \varepsilon) \tag{4}$$

не выполняется хотя бы при одном значении $t \geqslant t_0$.

Определение 2. Нулевое решение системы (1) интервально неустойчиво, если выполняется хотя бы одно из условий:

а) оно неустойчиво при интервальных начальных значениях;

б) хотя бы одно решение $x(t, t_0, x_0) \in X(t)$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Об интервальной неустойчивости движения.

Определение 3 (см. [1]). Функция $V(t, x)$ называется локально большой, если для любого $0 < c < +\infty$ и $t_0 \geqslant 0$ существует $\Delta = \Delta(t_0, c) > 0$ такое, что вне сферы

$$G_\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < \Delta\} \tag{5}$$

выполняется неравенство $V(t, x) > c$ при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 4. Локально большая функция $V(t, x)$ является определенно положительной, если она удовлетворяет условиям определения 3 и оценке $V(t, x) \geqslant W(x)$, где $W(x)$ — определенно положительная функция в смысле Ляпунова.

Пусть для системы (1) построена локально большая вспомогательная функция $V(t, x)$, $V \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, для которой определена полная производная

$$\frac{dV(t, x)}{dt} = \limsup\{[V(t + h, x + hf(t, x)) - V(t, x)]h^{-1} \colon h \to 0^+\} \tag{6}$$

вдоль любого решения $x(t) \in X(t)$ задачи (1), (2).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *выполняются следующие условия:*

1) существуют локально большая функция $V(t, x)$ и функция $W(t, x)$ такие, что

а) на любом решении $x(t) \in X(t)$ задачи (1), (2)

$$\frac{dV(t, x)}{dt} = \lambda(t, x)V(t, x) + W(t, x),$$

где $\lambda \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$;

б) функция $W(t, x) \geqslant 0$ на решениях $x(t) \in X(t)$;

2) в любой окрестности $S(H)$ состояния $(x = 0; t \geqslant t_0)$ существуют точки $(x \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \in \in S(H)$ такие, что при некотором $t > t_0$ функция $V(t, x) > 0$;

3) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любом δ $(\delta < \varepsilon)$ неравенство

$$V(t, x(t)) \geqslant V(t_0, x_0) \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau, x(\tau))\, d\tau\right]$$

не сохраняется при всех $t \geqslant t_0$ хотя бы на одном решении $(x(t) \in X(t)) \bigcap (\|x(t)\| < \varepsilon)$ с начальными значениями $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \delta)$, для которых $V(t_0, x_0) > 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) интервально неустойчиво.

Доказательство. Пусть $x(t) \in X(t)$ — любое решение системы (1) при условиях (2). Предположим, что при выполнении условий (1)–(3) теоремы 1 нулевое решение системы (1) устойчиво при интервальных начальных условиях, т. е. для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что при начальных значениях $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \delta)$ верна оценка $(x(t) \in X(t)) \bigcap (\|x(t)\| < \varepsilon)$ при всех $t \geqslant t_0$ и, кроме того, $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0$ при любом значении $x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ при $t \to +\infty$. Пусть $(x_0^* \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0^*\| < \delta)$ — то значение x_0, при котором $V(t_0, x_0^*) > 0$. Обозначим функцию $V^*(t, x(t))$ на решении $x(t) = x(t, t_0, x_0^*)$ и рассмотрим равенство (1) (a) на этом решении:

$$\frac{dV^*(t, x(t))}{dt} = \lambda V^*(t, x(t)) + W^*(t, x(t)), \tag{7}$$

где W^* — функция $W(t, x(t))$ на этой же кривой. Поскольку $W(t, x(t)) \geqslant 0$ на любом решении $x(t) \in X(t)$, в неравенстве (7) опустим W^* и получим оценку

$$V^*(t, x(t)) \geqslant V^*(t_0, x_0^*) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, x(\tau))\, d\tau\right],$$

которая выполняется при всех $t \geqslant t_0$. Это неравенство противоречит условию (3) теоремы 1 и доказывает, что нулевое решение системы (1) неустойчиво при интервальных начальных условиях. Покажем теперь, что выполняется условие *б* определения 2. Предположим обратное, что все решения $x(t, t_0, x_0) \in X(t)$ стремятся к нуля при $t \to +\infty$. Пусть $\widetilde{x}_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ — фиксированное значение x_0, при котором $V(t_0, \widetilde{x}_0) > 0$ и $x(t, t_0, \widetilde{x}_0) \to 0$ при $t \to +\infty$. При выполнении условий (1), (2) теоремы 1 для функции $V(t, x(t))$ имеем неравенство

$$V(t, x(t)) \geqslant V(t_0, \widetilde{x}_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, x(\tau))\, d\tau\right],$$

которое указывает на возрастание функции $V(t, x(t))$ вдоль этого решения. В то же время $V(t, x(t)) \to 0$, так как по предположению $x(t, t_0, \widetilde{x}_0) \to 0$ при $t \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что выполняется условие *б* определения 2. Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 выполняются оба условия определения 2. Этим доказано более сильное свойство, чем интервальная неустойчивость состояния $x = 0$ системы (1).

Теорема 1 имеет ряд следствий.

Следствие 1. *Пусть выполняется условие (1) теоремы 1 и, кроме того,*

1) функция $V(t, x) = c$, $0 < c < \infty$ на решениях $x(t) \in X(t)$;

2) на любых решениях $x(t) \in X(t)$ системы (1)

$$\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, x(\tau)) d\tau \to +\infty \qquad \text{при} \qquad t \to +\infty.$$

Тогда нулевое решение системы (1) *неустойчиво при интервальных начальных условиях* (2).

Действительно, при выполнении условий (1) теоремы 1 имеем

$$V(t, x(t)) \geqslant V(t_0, x_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, x(\tau))\, d\tau\right], \tag{8}$$

где $V(t_0, x_0) > 0$ при $x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$. При выполнении условия (2) следствия 1 правая часть неравенства (8) неограниченно возрастает, в то время как функция $V(t, x)$ не возрастает согласно условию (1). Следовательно, найдется решение $x(t) \in X(t)$, которое покинет область

$\|x(t)\| < \varepsilon$ при $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \delta)$, что и доказывает неустойчивость при интервальных начальных условиях.

Следствие 2. *Пусть выполняется условие* (1) *следствия 1 и* $\lambda(t, x(t)) = \lambda = \mathrm{const} > 0$. *Тогда нулевое решение системы* (1) *неустойчиво при интервальных начальных условиях* (2).

Доказательство этого утверждения следует из оценки (8), так как в этом случае

$$V(t, x(t)) \geqslant V(t_0, x_0) \exp[\lambda(t - t_0)] \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0$$

и $x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, что невозможно в силу условия (1) следствия 1.

Следствие 3. *Пусть существуют функции $V(t, x)$, $W(t, x)$, указанные в теореме 1, и, кроме того,*

1) функция $V(t, x)$ удовлетворяет условию (1) *следствия 1 и $W(t, x) > 0$ в любой окрестности $S(H)$ состояния $(x = 0,\ t \geqslant t_0)$;*

2) при любых $x(t) \in X(t)$ верно соотношение

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} = W(t, x(t));$$

3) функция $\lambda(t) = W(t, x)/V(t, x)$ такая, что $\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Тогда нулевое решение системы (1) *неустойчиво при интервальных начальных условиях.*

Докажем это утверждение. Для $\lambda(t) = W(t, x)/V(t, x)$ в области значений $x \in S(H)$ имеем $dV(t, x)/dt = \lambda(t)V(t, x)$. Отсюда

$$V(t, x(t)) \geqslant V(t_0, x_0) \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau\right] \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0 \tag{9}$$

и $x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$. Из условия (1) и из неравенства (9) следует утверждение следствия 3.

П р и м е р 1. Пусть $u(t) = Kx(t)$, $K - n \times n$ — постоянная матрица, $x \in \mathbb{R}^n$ — управление для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{10}$$

$$x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \tag{11}$$

где $A(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(t) A_i$, $B(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(t) B_i$. Здесь $\alpha_i(t) \geqslant 0$ — кусочно-непрерывные функции такие, что $\alpha_i(t) \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i(t) = 1$, а A_i, B_i — постоянные матрицы соответствующих размерностей (см. [2] и библиографию там).

Система (10), (11) редуцирует к следующей:

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + B(t)K)x = \Phi(t)x, \tag{12}$$

$$x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]. \tag{13}$$

Предположим, что для системы (12), (13) выполняются следующие условия:

1) при любых $x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ и $\alpha_i(t) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, указанных выше, решение $x(t, t_0, x_0)$ определено при всех $t \geqslant t_0$;

2) для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) существует $t^* > t_0$ такое, что

$$\Phi^T(t^*) + \Phi(t^*) - \frac{1}{t^* - t_0} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) E_n > 0, \tag{14}$$

где $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0^T x_0\| < \delta)$, а E_n — $n \times n$-единичная матрица.

Тогда нулевое решение системы (12) интервально неустойчиво.

Утверждение о неустойчивости системы (12) сохраняется, если условие (14) заменить следующим:

$$A_i^T + A_i + K^T B_i^T + B_i K - \frac{1}{t^* - t_0} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) E_n > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Докажем эти утверждения.

Для системы (12) рассмотрим множество

$$X(t) = \left\{ x(t) \colon \frac{dx}{dt} = \Phi(t)x,\ x(t_0) = x_0,\ x_0 \in [\underline{x}_0,\ \overline{x}_0],\ t_0 \in [0, \infty) \right\} \tag{15}$$

и функцию $V(x) = x^T x$. Пусть существует положительная постоянная $\chi > 0$ такая, что

$$\Phi^T(t) + \Phi(t) > \chi E_n, \tag{16}$$

где E — $n \times n$-единичная матрица. Очевидно, что $dV(x(t))/dt > \chi V(x(t))$ и, следовательно,

$$V(x(t)) > V(x(t_0)) \exp[\chi(t - t_0)]. \tag{17}$$

или, что то же самое,

$$x^T(t)x(t) > x_0^T x_0 \exp[\chi(t - t_0)]. \tag{18}$$

Неустойчивость нулевого решения системы (12) при интервальных начальных условиях (13) будет показана, если для любых ε и δ ($\delta < \varepsilon$) при $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0^T x_0\| < \delta)$ найдется $t^* > t_0$ такое, что $x^T(t^*)x(t^*) > \varepsilon$.

Из неравенства (18) получим

$$\delta \exp[\chi(t^* - t_0)] = \varepsilon, \tag{19}$$

откуда

$$\chi = \frac{1}{t^* - t_0} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right). \tag{20}$$

Из оценки (16) при значении χ из (20) получаем линейное матричное неравенство

$$\Phi^T(t^*) + \Phi(t^*) > \frac{1}{t^* - t_0} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) E_n,$$

выполнения которого достаточно для интервальной неустойчивости нулевого решения системы (12).

Таким образом, показано, что управление указанного вида может не стабилизировать движение неустойчивой линейной системы или разрушить существующее интервально устойчивое движение, если ее параметры такие, что выполняются условия (1), (2) из примера 1.

Заключительные замечания. В работе [4] начато исследование проблемы устойчивости движения при интервальных начальных условиях. Прямой метод Ляпунова является эффективным средством анализа устойчивости движения такого рода. Теорема о неустойчивости, приведенная в данной работе, как и следствия 1–3, навеяны известными теоремами о неустойчивости А. М. Ляпунова [3], Н. Г. Четаева [6] и В. И. Зубова [5]. Остановимся на некоторых комментариях к приведенному определению неустойчивости при интервальных начальных условиях.

1. Если $0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ и величина интервала покрывается δ-окрестностью (в терминах (ε, δ)-определений Ляпунова), то определение 1 совпадает с определением неустойчивости нулевого решения системы (1) в смысле Ляпунова.

2. Если интервальные значения такие, что $\underline{x}_0 = 0$ либо $\overline{x}_0 = 0$, тогда при покрытии δ-окрестностью интервала $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ определение 1 обращается в определение неустойчивости в конусе при условии, что множество решений системы (1) определено в конусе.

1. *Мартынюк А. А.* Практическая устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1983. – 247 с.
2. *Boyd L., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 193 p.
3. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Ленинград; Москва: ОНТИ, 1935. – 386 с.
4. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости движения при интервальных начальных условиях // Доп. НАН України. – 2013. – № 1. – С. 47–52.
5. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – Ленинград: Машиностроение, 1974. – 334 с.
6. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – Москва: Наука, 1990. – 175 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 11.04.2013

Академік НАН України **А. А. Мартинюк**

Про нестійкість руху при інтервальних початкових умовах

Досліджується система рівнянь збуреного руху загального вигляду при інтервальних початкових умовах. Для цього класу систем рівнянь за допомогою прямого методу Ляпунова отримано достатні умови нестійкості руху. Як приклад розглянуто лінійну систему із неточними значеннями параметрів.

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

On the instability of motion under interval initial data

We conseder a class of nonlinear systems under interval initial data. The sufficient conditions of instability via direct Lyapunov functions are derived. As an example, we considered linear uncertain systems of equations.