

Ю. А. Черняков, А. Г. Шевченко

## Локализация пластической деформации в форме ограниченной полосы разрыва перемещений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. С. Гудрамовичем)

*Исследован вопрос о формировании ограниченной полосы разрыва перемещений (локализации пластической деформации) для материалов с площадкой текучести. Для двух моделей распределения напряжений вдоль полосы построено ограниченное поле напряжений на продолжении полосы. Установлено, что длина полосы конечная и определяется в зависимости от действующего в теле максимального касательного напряжения, а также верхнего и нижнего пределов текучести, которые характерны для диаграмм одноосного нагружения исследуемого материала при контроле деформации.*

В классической теории пластичности одной из основных является схема идеально-пластического поведения материала, имеющего явно выраженную площадку текучести на диаграмме одноосного нагружения. Однако в ряде экспериментальных работ показано, что такое поведение реализуется только при “мягком” нагружении, тогда как при “жестком” нагружении на диаграмме одноосного нагружения появляется “пик-зуб”, как показано на рис. 1 (кривая *OABCE*). Поведение материала на площадке текучести является неустойчивым, причем потеря устойчивости происходит в результате “перескока” из упругого состояния (точка *A*) в состояние упрочнения (точка *D*). Известно, что в результате такой потери устойчивости и появляются локализованные полосы сдвига Людерса–Чернова.

Явление локализации изучалось в ряде теоретических и экспериментальных работ [1–5]. Однако проблема локализации пластической деформации при однородном напряженном состоянии изучена недостаточно.

В работе В. В. Новожилова [6] впервые дана трактовка хрупкого разрушения как потери устойчивости “в большом” (подобно эффекту хлопка в оболочке) на уровне атомных связей, в результате которой образуется трещина отрыва, равновесная длина которой зависит от действующей нагрузки. Локализация пластической деформации также является результатом потери устойчивости подобного типа, которая в данном случае приводит к перескоку из

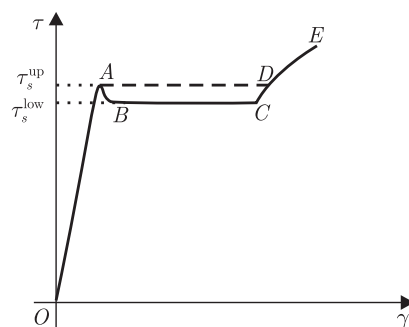


Рис. 1. Диаграмма материала

© Ю. А. Черняков, А. Г. Шевченко, 2013

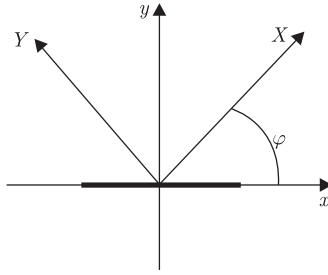


Рис. 2. Система координат

однородного упругого состояния к локализованному пластическому сдвигу. В связи с этим возникает вопрос: возможно ли образование ограниченной полосы локализации сдвига при однородном напряженном состоянии?

В настоящей работе исследуется локализация пластической деформации в форме полосы конечной длины в условиях плоского напряженного состояния. Получена формула, связывающая длину локализованной области с верхним и нижним пределами текучести.

**Постановка задачи.** Рассмотрим для определенности бесконечную пластинку, находящуюся в условиях однородного плоского напряженного состояния. Введем для пластинки декартову систему координат  $OXY$  и будем считать известными компоненты тензора напряжений  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  и  $\tau_{XY}$ .

Материал пластинки характеризуется диаграммой чистого сдвига, показанной на рис. 1. В зависимости от условий нагружения, имеется два вида диаграммы: с площадкой текучести (кривая  $OADE$ ) и с “пиком-зубом” (кривая  $OABCE$ ). Напряжения, отвечающие точкам  $A$  и  $B$ , будем называть верхним  $\tau_s^{\text{up}}$  и нижним  $\tau_s^{\text{low}}$  пределами текучести соответственно.

Возникновение начальной области локализации, в принятой здесь трактовке, рассматривается как потеря устойчивости “в большом” однородной деформации тела в форме образования локализованной полосы пластического течения.

При достижении нижнего предела текучести  $\tau_s^{\text{low}}$  пластинка может находиться в двух состояниях равновесия — в упругом однородном или в упругом с локализованной полосой пластической деформации, как показано на рис. 2.

Свяжем с полосой локализации систему координат  $Oxy$ , как показано на рис. 2. Примем, что направление оси  $Ox$  будет совпадать с направлением максимальных касательных напряжений  $\tau_{\text{max}}$  для заданного напряженного состояния.

В пределах полосы локализации действуют только касательные напряжения, которые оказывают наибольшее влияние. Учитывая диаграмму  $\tau \sim \gamma$  (рис. 1), можно допустить, что на берегах полосы локализации на участке  $0 \leq |x| \leq l$  действуют только касательные напряжения  $\tau_s^{\text{low}}$ , а на участках  $l \leq |x| \leq b$  касательные напряжения могут изменяться от значения  $\tau_s^{\text{low}}$  до  $\tau_s^{\text{up}}$ . Рассмотрим две схемы распределения напряжений, характеризующих сопротивление движению разрывов перемещений вдоль берегов полосы: кусочно-постоянную (рис. 3, *a*), и кусочно-линейную (рис. 3, *б*). Первая из них напоминает модель Леонова–Панасюка [7] и Dugdale [8], но с тем существенным отличием, что напряжения  $\tau_s^{\text{low}}$  в пределах полосы не равны нулю ( $\tau_s^{\text{low}} > 0$ ). Требуется определить длину полосы локализации  $b$ .

**Решение задачи.** Для решения задачи воспользуемся методом разрывных смещений, по которому полосу продольного сдвига представим в виде некоторой совокупности краевых

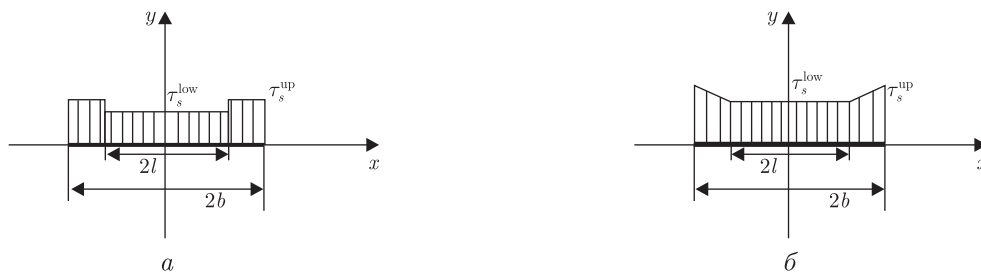


Рис. 3. Распределение напряжений, характеризующих сопротивление движению разрывов перемещений вдоль полосы

дислокаций с соответствующим вектором Бюргера  $b_0$ .

Известно [6], что если в начале координат существует разрыв смещений в форме краевой дислокации с вектором Бюргера  $b_0$ , параллельным оси  $x$ , то поле напряжений в некоторой точке  $(x, y)$  будет определяться следующими соотношениями:

$$\vec{b} \parallel x, \quad \sigma_x = -\frac{\mu b_0 y (3x^2 + y^2)}{2\pi(1-\nu)(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{\mu b_0 y (x^2 - y^2)}{2\pi(1-\nu)(x^2 + y^2)^2},$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu b_0 x (x^2 - y^2)}{2\pi(1-\nu)(x^2 + y^2)^2},$$
(1)

где  $\mu$  — упругий модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Пусть линия разрыва перемещений расположена вдоль оси  $x$  и дислокации, распределенные вдоль этой линии, имеют плотность  $b_0 f(\xi)$ . Разрыв перемещений, в пределах малого отрезка  $d\xi$  в точке  $(\xi, 0)$ , вызывают напряжения в точке  $(x, 0)$ , которые могут быть представлены следующим образом:

$$d\tau_{xy} = \frac{\mu b_0}{2\pi(1-\nu)} \frac{f(\xi)}{\xi - x}.$$
(2)

На основании этого можно записать

$$\int_{-b}^b \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{2\pi(1-\nu)\tau(x)}{\mu b_0},$$
(3)

где  $\tau(x)$  — распределение напряжений на оси  $x$ . В случае кусочно-постоянного распределения  $\tau(x)$  задаем в виде:

$$\tau(x) = \begin{cases} -\tau_1 = \tau_{\max} - \tau_s^{\text{up}}, & l < |x| < b, \\ \tau_0 = \tau_{\max} - \tau_s^{\text{low}}, & 0 < |x| < l. \end{cases}$$
(4)

В случае кусочно-линейного распределения имеем:

$$\tau(x) = \begin{cases} -\tau_1 = \tau_{\max} - \tau_s^{\text{low}} - (\tau_s^{\text{up}} - \tau_s^{\text{low}}) \frac{|x| - l}{b - l}, & l < |x| < b, \\ \tau_0 = \tau_{\max} - \tau_s^{\text{low}}, & 0 < |x| < l. \end{cases}$$
(5)

Уравнение (3) является сингулярным интегральным уравнением первого рода с ядром Коши. Решение его при условии ограниченности функции  $f(\xi)$

$$\int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi = 0 \quad (6)$$

известно, и функция распределения разрывов смещений имеет вид:

$$f(x) = \frac{2(1 - \nu)\sqrt{b^2 - x^2}}{\mu\pi b_0} \int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{(\xi - x)\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (7)$$

После подстановки в уравнение (6) распределения напряжений  $\tau(x)$  из условий (4) и (5) получаем трансцендентное уравнение для определения размера  $\theta = b/l$ :

$$\pi(\beta - \alpha) + 2(\alpha - 1)F(\theta) = 0, \quad (8)$$

где

$$\beta = \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau_s^{\text{up}}}, \quad \alpha = \frac{\tau_s^{\text{low}}}{\tau_s^{\text{up}}},$$

$$F(\theta) = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\theta} & \text{— для кусочно-постоянного распределения,} \\ \sqrt{\frac{\theta + 1}{\theta - 1}} - \frac{1}{\theta - 1} \arccos \frac{1}{\theta} & \text{— для кусочно-линейного распределения.} \end{cases}$$

Длина полосы локализации остается пока не определенной. Для формулировки дополнительного условия, которое позволит определить искомую длину, вспомним, что деформация в полосе должна быть ограничена величиной, связанной с длиной площадки текучести  $BC$ , так как приведенное выше решение допустимо только до достижения деформацией участка упрочнения в точке  $C$ . Для реализации этого условия определим скачок перемещения в полосе локализации.

Максимальный разрыв перемещений будет достигаться в средней точке полосы и определится по формуле

$$\delta = b_0 \int_b^0 f(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Если учесть построенные выше решения для функции распределения дислокаций, для безразмерного разрыва перемещений  $\bar{\delta} = \delta/b$  получим

$$\bar{\delta} = \frac{4}{\pi}(1 - \alpha)(1 - \nu)\gamma_s \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta} \quad (10)$$

для кусочно-постоянного распределения или

$$\bar{\delta} = \frac{2(1 - \nu)\gamma_s}{\pi} \left[ \frac{\beta - 1}{\theta(\theta - 1)} (\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}) - \theta\sqrt{\theta^2 - 1}) + 2(\beta - \alpha) \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta} \right] \quad (11)$$

для кусочно-линейного распределения.

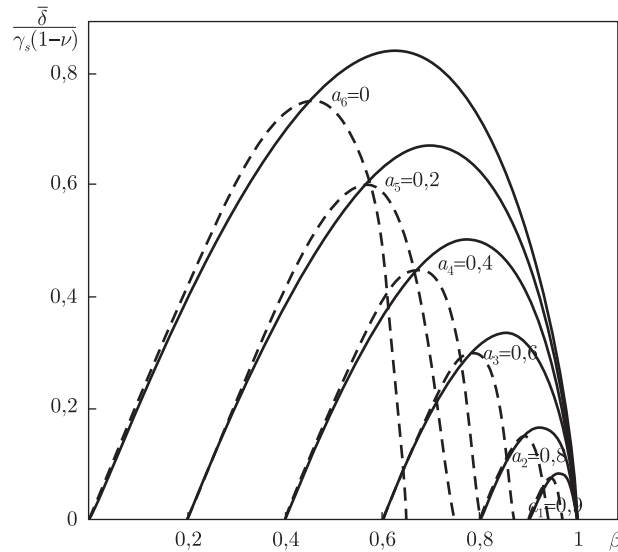


Рис. 4. Графики зависимости  $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$  от параметра  $\beta = \tau_{\max}/\tau_s^{\text{up}}$  для различных значений  $\alpha = \tau_s^{\text{low}}/\tau_s^{\text{up}}$ . Сплошные линии — результаты для кусочно-постоянного распределения, штриховые — для кусочно-линейного

Здесь  $\gamma_s$  — предел текучести по деформациям.

На рис. 4 представлены зависимости величины безразмерного разрыва перемещений  $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$  от параметра нагрузки  $\beta = \tau_{\max}/\tau_s^{\text{up}}$  для некоторых фиксированных значений параметра  $\alpha = \tau_s^{\text{low}}/\tau_s^{\text{up}}$ , характеризующего различие верхнего и нижнего пределов текучести. Из приведенных графиков следует, что для каждого  $\alpha$  существует два различных значения  $\beta$  для одного и того же отношения  $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$ . Кроме того, кривые, отвечающие фиксированному значению  $\bar{\delta}$ , имеют явно выраженный максимум. Это означает, что для каждого  $\alpha$  можно найти максимальное отношение  $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$ , которое определит минимальную длину полосы локализации.

Дадим количественную оценку минимальной длины полосы локализации. Для этого представим  $\delta$  в следующем виде:

$$\delta = h\gamma_C, \tag{12}$$

где  $h$  — условная толщина полосы;  $\gamma_C$  — деформация сдвига на площадке текучести (деформация Людерса). В таком случае длина линии разрыва будет определяться по формуле

$$b = \frac{1}{(1-\nu)\bar{\delta}} \frac{\gamma_C}{\gamma_s} h. \tag{13}$$

По данным для стали 1045, приведенным в работе [4], имеем  $\gamma_C = 1,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma_s = 2,5 \cdot 10^{-3}$ . Сложнее обстоит дело с величиной  $h$ . Для ее определения будем исходить из того, что характерная ширина полосы локализации материала определяется средним размером зерна поликристаллического материала, поскольку размер зерна оказывает большое влияние на деформацию Людерса и морфологию полос, особенно для малоуглеродистых сталей [4, 5]. В соответствии с данными, приведенными в работе [4], средний размер зерна стали 1045  $h = 10$  мкм. Тогда отношение  $\bar{\delta}/(1-\nu)/\gamma_s$ , к примеру для  $\alpha = 0$ , будет порядка 0,848 и длина полосы  $b$  порядка 100 мкм, т.е.  $b \approx 10h$ .

Таким образом, представленные результаты показывают, что локализованная полоса сдвига может иметь конечную длину, зависящую от соотношения между действующей нагрузкой, верхним и нижним пределом текучести. Аналогичные выводы можно сделать и для случая ограниченной длины полосы локализации при растяжении, только в этом случае следует говорить не о локализации сдвига, а о локализации в форме шейки.

1. Hall E. O. The deformation and aging of mild steel: II. Characteristics of the Luders deformation. III. Discussion of result // Proc. Phys. Soc. – 1951. – В 64. – P. 742–753.
2. Morrison W. B., Glenn R. C. Examination of the Luders front in a low-carbon steel by transmission electron microscopy // J. Iron Steel Inst. – 1968. – 206. – P. 611–612.
3. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
4. Zhang J., Jiang Y. Luders bands propagation of 1045 steel under multiaxial stress state // Intern. J. of Plasticity. – 2005. – 21. – P. 651–670.
5. Bigoni D., Dal Corso F. The unrestrainable growth of a shear band in a prestressed material // Proc. R. Soc. – 2008. – A464. – P. 2365–2390.
6. Новожиллов В. В. К основам равновесных упругих трещин в упругих телах // Прикл. мех. и мат. – 1969. – 33, вып. 5. – С. 797–812.
7. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. – 1959. – 5, вып. 4. – С. 391–401.
8. Dugdale D. S., Mech J. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – 8. – No 2. – P. 100–108.

Днепропетровский национальный университет  
им. О. Гончара

Поступило в редакцию 03.04.2013

**Ю. А. Черняков, А. Г. Шевченко**

### **Локалізація пластичної деформації у формі обмеженої смуги розриву переміщень**

*Досліджено питання про формування обмеженої смуги розриву переміщень (локалізації пластичної деформації) для матеріалів з площадкою текучості. Для двох моделей розподілу напружень вздовж смуги побудовано обмежене поле напружень на продовженні смуги. Встановлено, що довжина смуги кінцева і визначається залежно від діючого в тілі максимального дотичного напруження, а також верхньої і нижньої меж текучості, які характерні для діаграм одновісного навантаження досліджуваного матеріалу при контролі деформації.*

**Y. A. Chernyakov, A. G. Shevchenko**

### **The localization of a plastic strain in the form of the limited band of a displacement gap**

*The question of the formation of the limited band of a displacement gap (plastic strain localization) for materials with a yield plateau is considered. For two models of stress distribution along a strip, a limited field of stresses on a continuation of the band is constructed. It is found that the length of the strip is finite and is determined by the maximum shear stress of the body, as well as the upper and lower yield stresses that are characteristic of the diagrams of uniaxial loading with a control over strains.*