УДК 519.1

Б. В. Олийнык

Изометрическое представление пространства Хемминга периодических последовательностей на границе корневого дерева

(Представлено академиком НАН Украины Н. А. Перестюком)

Показано, что изометрии пространств всех открыто-замкнутых подмножеств границ сферически однородных локально конечных деревьев на пространства Хемминга периодических $(0,1)$-последовательностей могут быть построены при помощи "adding machine" — сферически транзитивного автоморфизма дерева T_τ.

1. Пусть n — фиксированное натуральное число. Нормализованным пространством Хемминга H_n называется метрическое пространство, заданное на множестве всех $(0,1)$-последовательностей длины n с метрикой d_{H_n}, определяемой равенством

$$d_{H_n}(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \tag{1}$$

где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in H_n$.

Пусть $\tau = (m_1, m_2, \ldots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел, т. е. $m_i | m_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}$ — множество всех таких последовательностей. Бесконечная $(0,1)$-последовательность $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ называется периодической, если существует такое натуральное число m, что для всех $i \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $a_i = a_{i+m}$. При этом число m называется периодом последовательности $\mathbf{a}$. Периодическую последовательность, периоды которой являются делителями членов последовательности τ, назовем τ-периодической; множество всех бесконечных τ-периодических $(0,1)$-последовательностей будем обозначать символом $\mathcal{H}(\tau)$. Нормализованная метрика Хемминга d_{H_n} естественным образом распостраняется на пространство бесконечных τ-периодических $(0,1)$-последовательностей. А именно, для точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ из $\mathcal{H}(\tau)$, имеющих периоды m и n соответственно, обозначим через l их общий период и положим

$$d_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} |x_i - y_i|. \tag{2}$$

Правая часть равенства (2) не зависит от выбора периодов m, n и l, поэтому число l можно считать равным наименьшему общему кратному чисел m и n.

Каждое пространство $\mathcal{H}(\tau)$ изометрически вкладывается в так называемое пространство Безиковича или Безиковича–Хемминга (см., например, [1, 2]), которое давно используется в теории динамических систем и эргодической теории. Кроме того, каждое из рассматриваемых постранств $\mathcal{H}(\tau)$, $\tau \in \mathcal{D}$, допускает представление, с одной стороны, как индуктивный предел конечных пространств Хемминга соответствующих размерностей, а с другой —

как пространство всех открыто-замкнутых подмножеств границы подходящего сферически однородного локально конечного дерева [3]. Заметим также, что в случае $\tau = (2, 4, 8, \ldots)$ свойства пространства $\mathcal{H}(\tau)$ исследовались в работе [4].

Естественно возникает вопрос о конструктивном описании изометрий между пространствами всех открыто-замкнутых подмножеств границ сферически однородных локально конечных деревьев и пространствами бесконечных τ-периодических $(0, 1)$-последовательностей, существование которых установлено в [3]. В этом сообщении мы покажем, что изометрия между вышеупомянутыми пространствами может быть весьма естественно построена при помощи фиксированной “adding machine” — сферически транзитивного автоморфизма дерева T_τ.

2. Напомним, как определяется реализация периодических пространств Хемминга на границах сферически однородных корневых деревьев.

Пусть T — локально конечное корневое дерево, т. е. дерево с фиксированной вершиной, называемой корнем дерева, из каждой вершины которого выходит конечное число ребер. Множество L_n, состоящее из вершин дерева T, соединенных с корнем v_0 путем длины n, $n \geqslant 0$, называется n-м уровнем корневого дерева T.

Корневое дерево (T, v_0) называется *сферически однородным*, если степени всех вершин одного уровня равны между собой. Последовательность натуральных чисел $[s_1; s_2; \ldots,]$, для которой число s_1 является степенью корня v_0, а для всех $i > 1$ число $s_i + 1$ — степенью вершин уровня L_{i-1}, называется *сферическим индексом* (или индексом ветвления) сферически однородного дерева (T, v_0). Понятно, что сферически однородное дерево (T, v_0) с точностью до изоморфизма корневых деревьев определяется своим индексом ветвления однозначно, кроме того, последовательность $m_k = |L_k|$, $k \geqslant 1$, мощностей его уровней является делимой, поскольку $m_k = s_1 \cdot s_2 \cdot \cdots \cdot s_k$.

Множество бесконечных путей без повторений, начинающихся в корневой вершине v_0 (так называемых концов T), называется *границей* ∂T дерева T. На границе ∂T вводится ультраметрика: для любых двух путей γ_1, $\gamma_2 \in \partial T$ расстояние между ними определяется равенством

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \text{если } \gamma_1 \neq \gamma_2, \\ 0, & \text{если } \gamma_1 = \gamma_2, \end{cases}, \tag{3}$$

где k — номер уровня, на котором пути γ_1 и γ_2 расходятся. Пространство $(\partial T, \rho)$ является вполне несвязным компактом диаметра 1.

Для строго возрастающей делимой последовательности $\tau = (m_1, m_2, \ldots)$ определим последовательность ее частных $[s_1; s_2; \ldots,]$:

$$s_1 = m_1, \qquad s_i = \frac{m_i}{m_{i-1}}, \qquad i \geqslant 2. \tag{4}$$

Символом T_τ обозначим сферически однородное корневое дерево, индекса ветвления $[s_1; s_2; \ldots]$, а символом ρ_τ — метрику на ∂T_τ, определенную равенством (3).

Пусть v — некоторая вершина корневого дерева T_τ. Множество всех концов T_τ, проходящих через вершину v, называется *цилиндрическим множеством* C_v, соответствующим вершине v:

$$C_v = \{\gamma \in \partial T_\tau \mid v \in \gamma\}.$$

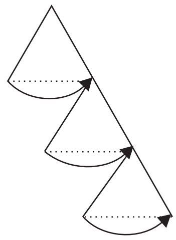

Рис. 1

Метрика ρ_τ индуцирует топологию на границе ∂T_τ. Открыто-замкнутыми подмножествами в этой топологии являются конечные объединения цилиндрических множеств и только они.

На σ-алгебре открыто-замкнутых множеств пространства ∂T_τ вводиться мера Бернулли μ, однозначно определяемая своими значениями на цилиндрических подмножествах:

$$\mu(C_v) = \frac{1}{n_v},$$

где n_v — число вершин дерева T_τ на уровне, содержащем вершину v. С помощью меры μ на множестве ΩT_τ всех открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ вводится структура метрического пространства. А именно, для любых открыто-замкнутых множеств A, B границы ∂T_τ расстояние между ними определяется равенством

$$d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B). \tag{5}$$

Теорема 1 [3]. *Пусть $\tau = (m_1, m_2, \ldots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел, $[s_1; s_2; \ldots]$ — последовательность ее частных, определенных формулами* (4), *T_τ — сферически однородное корневое дерево, сферического индекса $[s_1; s_2; \ldots,]$. Тогда пространство Хемминга $\mathcal{H}(\tau)$ всех τ-периодических* $(0, 1)$*-последовательностей изометрично пространству ΩT_τ всех открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ с метрикой d_μ, определенной равенством* (5).

Доказательство этой теоремы, предложенное в [3], не дает способа построения конкретной изометрии между пространствами ΩT_τ и $\mathcal{H}(\tau)$.

Замыканием подпространства ΩT_τ в пространстве $(\partial T_\tau, d_\mu)$ является пространство всех измеримых подмножеств (с точностью до множеств меры нуль) пространства $(\partial T_\tau, \mu)$ с метрикой d_μ. Обозначим это подпространство символом $\overline{\Omega T}_\tau$.

3. Автоморфизм u сферически однородного корневого дерева T_τ называется сферически транзитивным, если циклическая группа $\langle u \rangle$ действует транзитивно на каждом из уровней дерева T_τ. Типичным примером такого автоморфизма является “adding machine” (“счетная машина”) — автоморфизм однородного корневого дерева T_υ сферического индекса $\nu = [n; n; \ldots]$. Этот автоморфизм (рис. 1) задается последовательностью циклических перестановок вершин, принадлежащих фиксированному концу дерева. Граница дерева T_υ естественным образом отождествляется с пространством n-адических чисел с топологией проективного предела, а автоморфизм “adding machine” соответствует преобразованию $x \to x + 1$ этого пространства. Как известно (см., например, [5]), все сферически транзитивные автоморфизмы произвольного сферически однородного дерева T_τ образуют класс сопряженности в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ T_\tau$. Следовательно, в случае однородного дерева T_υ каждый из сферически транзитивных автоморфизмов сопряжен со “счетной машиной", в связи с чем название "счетная машина" часто употребляется для любого представителя этого класса сопряженности автоморфизмов, не только однородного, но и сферически однородного корневого дерева.

Выберем некоторую "счетную машину" — сферически транзитивный автоморфизм $w \in \in \operatorname{Aut} T_\tau$. Поскольку каждый автоморфизм α дерева T_τ действует как изометрия на границе $(\partial T_\tau, \rho)$ и наоборот, то w является также изометрией ∂T_τ. Пусть t_0 — фиксированная точка границы ∂T_τ. Для любого подмножества $A \subset \partial T_\tau$ определим бесконечную $(0,1)$-последовательность $s_w(A) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, полагая

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad w^n(t_0) \in A, \\ 0, & \text{если} \quad w^n(t_0) \notin A. \end{cases} \tag{6}$$

Тем самым получаем отображение F_w из множества всех подмножеств ∂T_τ в множество всех бесконечных $(0,1)$-последовательностей. Символом f_w обозначим сужение отображения F_w на множество ΩT_τ всех открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ.

Теорема 2. *Для любой строго возрастающей делимой последовательности натуральных чисел τ отображение f_w является изометрией пространства ΩT_τ всех открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ с метрикой d_μ, определенной равенством* (5)*, на пространство Хемминга τ-периодических* $(0,1)$*-последовательностей.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого подмножества $A \subset \partial T_\tau$ $(0,1)$-последовательность $s_w(A) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ будет периодической тогда и только тогда, когда подмножество A является открыто-замкнутым.

Предположим, что $A \subset \partial T_\tau$ — открыто-замкнутое подмножество. Тогда оно является конечным объединением цилиндрических множеств $A = \cup_{i \in I_A} C_{v_i}$, соответствующих вершинам некоторого уровня k. Точка t_0 принадлежит одному из цилиндрических множеств C_{v_i}, $v_i \in L_k$. Поскольку автоморфизм w дерева T_τ действует на каждом уровне циклично, то последовательность $s_w(A) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, определенная равенством (6), периодическая с периодом $|L_k|$, причем в периоде последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ будет ровно $|I_A|$ единиц.

И наоборот, если последовательность $s_w(A) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, определенная равенством (6), периодическая для некоторого подмножества A, то это означает, что A определяется как объединение шаров на некотором конечном уровне дерева T, т. е. как конечное объединение цилиндрических множеств. А это означает, что A — открыто-замкнутое.

Следовательно, отображение f_w является биекцией пространства ΩT_τ в пространство Хемминга τ-периодических $(0,1)$-последовательностей. Покажем, что f_w сохраняет метрику.

Пусть A, $B \subset \partial T_\tau$ — открыто-замкнутые подмножества. Значит, подмножества A, B являются конечными объединениями цилиндрических множеств, соответствующих вершинам некоторого уровня k. Пронумеруем вершины этого уровня и предположим, что $|L_k| = m_k$. Тогда можем записать равенства

$$A = \bigcup_{i \in I_A} C_{v_i}, \qquad B = \bigcup_{j \in I_B} C_{v_j}, \qquad \text{где} \qquad I_A, I_B \subseteq \{1, \ldots, m_k\}.$$

Следовательно,

$$A \triangle B = \bigcup_{i \in I_A} \bigcup_{i \in I_B} (C_{v_i} \triangle C_{v_j}),$$

но для симметрических разностей из правой части этого равенства справедливы соотношения

$$C_{v_i} \triangle C_{v_j} = \begin{cases} \varnothing, & \text{если} \quad i = j, \\ C_{v_i} \bigcup C_{v_j}, & \text{если} \quad i \neq j, \end{cases}$$

поэтому $A \triangle B$ также является объединением цилиндрических множеств, определяемых вершинами из L_k. А значит, с одной стороны, из определения меры μ и метрики d_μ следует

$$d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B) = \frac{|I_A \triangle I_B|}{m_k}. \tag{7}$$

С другой стороны, согласно показаному выше, последовательности $s_w(A) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ и $s_w(B) = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ периодические с периодом $|L_k| = m_k$ и в периоде этих последовательностей ровно $|I_A|$ и $|I_B|$ единиц соответственно. Причем для всех $0 \leqslant i \leqslant m_k - 1$ равенства $a_i = b_i = 1$ справедливы тогда и только тогда, когда $w^i(t_0) \in A$ и $w^i(t_0) \in B$ одновременно, а следовательно,

$$d_{\mathcal{H}}((a_0, a_1, a_2, \ldots), (b_0, b_1, b_2, \ldots)) = \frac{|I_A \triangle I_B|}{m_k}.$$

Таким образом, отображение f_w сохраняет метрику, т. е. является изометрией пространства ΩT_τ на пространство $\mathcal{H}(\tau)$.

Для любых делимых строго возрастающих последовательностей τ_1 и τ_2 пополнения пространств $\mathcal{H}(\tau_1)$ и $\mathcal{H}(\tau_2)$ изометричны. Обозначим пополнение пространства $\mathcal{H}(\tau)$ символом $\mathcal{H}$. Поскольку пространство $\mathcal{H}$ изометрично пространству всех измеримых подмножеств (с точностью до множеств меры нуль) пространства $(\partial T_\tau, \mu)$ с метрикой d_μ, определяемой равенством (5) (см. [3]), то в качестве следствия из теоремы 2 получаем такое утверждение.

Следствие 1. *Сужение отображения F_w на множество $\overline{\Omega T_\tau}$ является изометрией пространства всех измеримых подмножеств (с точностью до множеств меры нуль) пространства $(\partial T_\tau, \mu)$ с метрикой d_μ, определяемой равенством* (5) *на пространство $\mathcal{H}$.*

Поскольку сферически транзитивных автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, T_\tau$ континуум много и попарно различные "счетные машины" будут задавать различные изометрии, то получаем такое утверждение.

Следствие 2. *Для произвольного дерева T_τ существует не менее континуума попарно различных изометрий метрического пространства $\overline{\Omega T_\tau}$ на пространство Хемминга τ-периодических* $(0, 1)$*-последовательностей $\mathcal{H}(\tau)$.*

Робота частично поддержана Государственным агентством по вопросам науки, инноваций и информатизации Украины.

1. *Blanchard F., Formenti E., Kurka P.* Cellular automata in Cantor, Besicovitch and Weil topological spaces // Complex Systems. – 1997. – **11**. – P. 107–123.
2. *Вершик А. М.* Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. – 1994. – **6**, № 4. – С. 1–68.
3. *Олийнык Б. В., Сущанский В. И.* Группы изометрий пространств Хемминга периодических последовательностей // Сиб. мат. журн. – 2013. – **54**, No 1. – С. 163–179.
4. *Cameron P. J., Tarzi S.* Limits of cubes // Topology and its Applications. – 2008. – **155**. – P. 1454–1461.

5. *Bass H., Otero-Espinar M. V., Rockmore D., Tresser C.* Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees. – Berlin: Springer, 1995. – 163 p.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 02.04.2013

Б. В. Олійник

Ізометричне зображення простору Хеммінга періодичних послідовностей на границі кореневого дерева

Показано, що ізометрії просторів усіх відкрито-замкнених підмножин границь сферично однорідних локально скінченних дерев на простори Хеммінга періодичних $(0, 1)$*-послідовностей можуть бути побудовані за допомогою "adding machine" — сферично транзитивного автоморфізму дерева* T_τ*.*

B. V. Oliynyk

An isometric representation of the Hamming space of periodic sequences on the boundary of a rooted tree

It is shown that the isometry of the spaces of all open-closed subsets of the boundaries of spherically homogeneous locally finite trees on Hamming spaces of periodic sequences can be constructed using an "adding machine" that is a spherically transitive automorphism of the tree T_τ*.*