Доповіді
Національної
академії наук
України

11 • 2013

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.977

А. А. Белоусов

Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Рассматриваются игровые задачи преследования для линейных систем с общими выпуклыми интегральными ограничениями на управления. Предлагается расширение дифференциальной игры с помощью импульсных управлений. Формулируется аналог условия Л. С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия решения задачи за некоторое гарантированное время.

Динамические системы с интегральными ограничениями на управление имеют важное прикладное значение. Неудивительно, что довольно много работ посвящено изучению дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Однако они сосредоточивались главным образом на одном типе ограничений — функций-управлений из гильбертова пространства L_2. Но интерес представляют и более общие типы интегральных ограничений. Отметим статью М. С. Никольского [1], в которой игра обобщается на случай управления преследователя из пространства Орлича. В данной работе рассматривается дифференциальная игра с интегральным ограничением на управление преследователя, которое определяется выпуклым функционалом весьма общего вида. В частности, не предполагается кофинитность ограничивающего функционала [2], т. е. конечность сопряженного функционала на всем пространстве, как в [3]. При исследовании систем управления достаточно общего вида (например, для управлений из пространства L_1 [4]) естественным является привлечение аппарата управлений-мер и обобщенных функций [5, 6], а также обобщение понятий управления и решения. Ниже рассматривается расширение исходной дифференциальной игры с помощью импульсных управлений. Работа развивает исследования [3, 4, 7].

Динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \qquad z(0) = z^0, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^l$, A, B, C — постоянные матрицы.

Терминальное множество M является h-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

Управляющие вектор-функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ находятся в распоряжении (соответственно) игрока-преследователя и убегающего игрока. Управления игроков ограничены интегралами

$$\int\limits_0^\infty \varphi(u(\tau))\,d\tau \leqslant 1, \qquad \int\limits_0^\infty \psi(v(\tau))\,d\tau \leqslant 1. \tag{2}$$

Функция φ, $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, предполагается неотрицательной, выпуклой и конечной на всем пространстве $\mathbb{R}^m$. Напомним [2], что для выпуклых функций конечность на всем пространстве влечет непрерывность функции. Обозначим множество уровня функции φ через $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\gamma) = \{u \in \mathbb{R}^m \colon \varphi(u) \leqslant \gamma\}$. Полагаем, что $\varphi(0) = 0$ и множество уровня $\Phi(\gamma)$ ограничено хотя бы для одного неотрицательного γ.

Функция ψ, $\psi\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, предполагается полунепрерывной сверху.

Отметим, что если при изучении игры (1), (2) ограничиться лишь измеримыми (суммируемыми) управлениями, то множество достижимости для системы (1) может быть незамкнутым, хотя и ограниченным. Причина этого явления состоит в том, что множество управлений, удовлетворяющих (2), может содержать функции, которые сколь угодно близкие к δ-функциям. Общим подходом для замыкания такого множества управлений в $*$-слабой топологии является расширение исходной задачи с помощью функций ограниченной вариации или управлений-мер [5, 6].

Для исследования игровой задачи (1), (2) мы ограничимся привлечением аппарата импульсных управлений. Импульсное воздействие в момент τ описывается с помощью обобщенной функции Дирака $\delta(t-\tau)$ [5, 6, 8], которая характеризуется свойством

$$\int\limits_a^b f(t)\delta(t-\tau)\,dt = \begin{cases} f(\tau), & \tau \in [a,b], \\ 0, & \tau \notin [a,b] \end{cases}$$

для любой непрерывной функции $f(t)$. В качестве управлений преследователя и убегающего игрока возьмем обобщенные вектор-функции

$$\begin{gathered} U(t) = u(t) + \sum_{i=1}^\infty b_i\delta(t-\eta_i), \qquad V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^\infty c_j\delta(t-\theta_j), \\ 0 \leqslant \eta_1 < \cdots < \eta_i < \cdots, \qquad 0 \leqslant \theta_1 < \cdots < \theta_j < \cdots, \\ u(t) \in \mathbb{R}^m, \qquad v(t) \in \mathbb{R}^l, \qquad b_i \in \mathbb{R}^m, \qquad c_j \in \mathbb{R}^l, \qquad t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty), \end{gathered} \tag{3}$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — измеримые функции; последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ определяют моменты импульсов, векторы b_i и c_j определяют их величины. Полагаем, что последовательности $\{\eta_i\}$ и $\{\theta_j\}$ не имеют конечных точек сгущения, а значит на любом ограниченном интервале времени число импульсов конечно. Тогда ограничение (2) на управления игроков примет вид [5]:

$$\int\limits_0^\infty \varphi(u(\tau))\,d\tau + \sum_{i=1}^\infty \varphi(b_i) \leqslant 1, \qquad \int\limits_0^\infty \psi(v(\tau))\,d\tau + \sum_{j=1}^\infty \psi(c_j) \leqslant 1. \tag{4}$$

Управления вида (3), удовлетворяющие условиям (4), будем называть допустимыми.

При подстановке управлений (3) в уравнение (1) получается так называемое дифференциальное уравнение с толчками [8]. Решением этого уравнения является функция $z(t)$, которая абсолютно непрерывна всюду, кроме моментов импульсов, и имеет вид

$$z(t) = e^{At}z^0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}[BU(\tau) - CV(\tau)]\,d\tau =$$

$$= e^{At}z^0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}[Bu(\tau) - Cv(\tau)]d\tau + \sum_{\eta_i \leqslant t} e^{A(t-\eta_i)}Bb_i - \sum_{\theta_j \leqslant t} e^{A(t-\theta_j)}Cc_j, \qquad (5)$$

где суммирование осуществляется по всем моментам импульсов, не большим t.

Определение. Будем говорить, что игра может быть закончена в момент $T = T(z^0)$, если для любого допустимого управления убегающего игрока $V(t)$ существует допустимое управление преследователя $U(t)$, которое гарантирует приведение решения уравнения (5) $z(t)$, соответствующего управлениям $(U(t), V(t))$ и начальному положению z^0, на терминальное множество в момент T: $z(T) \in M$. Считаем, что при построении своего управления $U(t)$ преследователь в момент t может использовать информацию об управлении противника $V(t)$ в тот же момент времени. Таким образом, преследователь строит свое управление в классе контрстратегий.

Введем предположение на параметры игры, которое можно назвать аналогом условия Л. С. Понтрягина для дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Оно фиксирует некое преимущество преследующего игрока над убегающим и обеспечивает возможность решения задачи сближения. Обозначим через π оператор проектирования из $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение к M в $\mathbb{R}^n$.

Условие. Существует такое число λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, что для всех положительных t и всех векторов $v \in \mathbb{R}^l$ выполняется включение

$$\pi e^{At}Cv \in \pi e^{At}B\Phi(\lambda\psi(v)). \qquad (6)$$

Лемма. *При сделанных предположениях о свойствах функции φ множество уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, является полунепрерывным сверху выпуклозначным и компактозначным многозначным отображением.*

Доказательство. Выпуклость и компактность множества уровня $\Phi(\gamma)$, $\gamma \geqslant 0$, являются следствием непрерывности выпуклой функции φ и ограниченности множества $\Phi(\gamma)$ для какого-либо числа γ [2].

Отметим, что множества уровня образуют возрастающую по включению совокупность множеств: $\Phi(\gamma) \subset \Phi(\gamma + \delta)$ для всех неотрицательных γ и δ. Поэтому для доказательства полунепрерывности сверху $\Phi(\gamma)$ достаточно показать, что для любых γ и ε, $\gamma \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, существует число δ, $\delta > 0$, такое, что $\Phi(\gamma + \delta) \subset \Phi(\gamma) + \varepsilon D$, где D — единичный шар в $\mathbb{R}^m$, $D = \{u \in \mathbb{R}^m \colon u \leqslant 1\}$.

Обозначим через Γ границу выпуклого компакта $\Phi(\gamma) + \varepsilon D$. Множество Γ является компактом. Положим $\delta = \min\{\varphi(u) - \gamma \colon u \in \Gamma\}$ и покажем, что для этого δ выполняется требуемое включение.

Предположим, что существует вектор w, $w \in \Phi(\gamma + \delta)$, такой, что $\rho = \min\{\|w - u\| \colon u \in \Phi(\gamma)\} > \varepsilon$. Так как множество $\Phi(\gamma)$ является выпуклым компактом, то существует единственный вектор p, $p \in \Phi(\gamma)$, такой, что $\rho = \|w - p\|$. Рассмотрим вектор

$$u = p + \frac{\varepsilon}{\rho}(w - p) \in \Gamma.$$

Для этого вектора выполняются соотношения:

$$\varphi(u) = \varphi\left(\frac{\varepsilon}{\rho}w + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho}\right)p\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{\rho}\varphi(w) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho}\right)\varphi(p)\frac{\varepsilon}{\rho}(\gamma + \delta) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho}\right)\gamma =$$
$$= \gamma + \frac{\varepsilon}{\rho}\delta < \gamma + \delta.$$

Эти неравенства противоречат выбору δ, что и завершает доказательство.

Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1), (2) на терминальное множество M из начального положения z^0 с помощью импульсных управлений (3), (4). Напомним, что $\mathrm{co}(N)$ обозначает выпуклую оболочку множества N [2].

Теорема. *Полагаем, что выполнено условие* (6) *на параметры игры. Предположим, что существует момент* $T = T(z^0)$ *такой, что*

$$-\pi e^{AT} z^0 \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{0 \leqslant t \leqslant T} \pi e^{At} B \Phi(1 - \lambda)\right). \tag{7}$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент T.

Доказательство. Зафиксируем момент T, удовлетворяющий предположениям теоремы. По теореме Каратеодори о выпуклой оболочке [2], существует не более $n - h + 1$ векторов b_k, моментов времени χ_k, $0 \leqslant \chi_1 \leqslant \dots \leqslant \chi_k \leqslant \dots \leqslant T$, неотрицательных чисел β_k, $k = 1, \dots, n - h + 1$, $h = \dim M$, таких, что

$$-\pi e^{AT} z^0 = \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_k \pi e^{A(T - \chi_k)} B b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_k = 1, \qquad b_k \in \Phi(1 - \lambda). \tag{8}$$

Из леммы, с учетом полунепрерывности сверху функции $\psi(v)$, следует полунепрерывность сверху многозначного отображения $\Phi(\lambda\psi(v))$. По теореме об измеримом селекторе Куратовского и Рыль-Нардзевского [9, 10] получаем, что у включения (6) существует измеримый по Борелю селектор, т. е. измеримое по Борелю отображение $w(t, v) \in \Phi(\lambda\psi(v))$, такое, что $\pi e^{At} C v = \pi e^{At} B w(t, v)$ для всех $(t, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0, T]$ произвольное допустимое управление $V(t)$ вида (3)

$$V(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{N} c_j \delta(t - \theta_j), \qquad 0 \leqslant \theta_1 < \dots < \theta_j < \dots < \theta_N \leqslant T,$$

которое удовлетворяет ограничению (4).

Тогда управление игрока-преследователя на интервале $[0, T]$ положим

$$U(t) = w(T - t, v(t)) + \sum_{\theta_j \leqslant t} w(T - \theta_j, c_j)\delta(t - \theta_j) + \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_k b_k \delta(t - \chi_k). \tag{9}$$

Такой закон выбора управлений преследователя является контруправлением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [6]. Поэтому для любой измеримой функции $v(t)$ функция $w(T-t, v(t))$ в (9) будет измерима по Лебегу.

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (5) попадет на терминальное множество в момент T:

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int\limits_0^T \pi e^{A(T-t)}[Bw(T-t, v(t)) - Cv(t)]\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \pi e^{A(T-\theta_j)}[Bw(T-\theta_j, c_j) - Cc_j] + \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_k \pi e^{A(T-\chi_k)} Bb_k = 0.$$

Последнее равенство имеет место в силу выбора (8) и $\pi e^{At} Cv = \pi e^{At} Bw(t, v)$.

Проверим, что управление (9) удовлетворяет ограничению (4):

$$\int\limits_0^T \varphi(w(T-t, v(t)))\,dt + \sum_{j=1}^{N} \varphi(w(T-\theta_j, c_j)) + \sum_{k=1}^{n-h+1} \varphi(\beta_k b_k) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \left[\int\limits_0^T \psi(v(t))\,dt + \sum_{j=1}^{N} \psi(c_j)\right] + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{n-h+1} \beta_k \leqslant 1,$$

где $\varphi(\beta_k b_k) = \varphi((1-\beta_k)0 + \beta_k b_k) \leqslant \beta_k \varphi(b_k) \leqslant \beta_k(1-\lambda)$.

1. *Никольский М. С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Диф. уравнения. – 1972. – **8**, № 6. – С. 964–971.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – Москва: Мир, 1973. – 470 с.
3. *Белоусов А. А.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями общего вида // Теорія оптимальних рішень. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2012. – С. 30–35.
4. *Белоусов А. А.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления в норме L_1 // Там само. – 2011. – С. 3–9.
5. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. – Москва: Наука, 2005. – 429 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1981. – 544 с.
7. *Чикрий А. А., Белоусов А. А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 4. – С. 290–301.
8. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – Москва: Наука, 1985. – 224 с.
9. *Куратовский К.* Топология. Ч. 2. – Москва: Мир, 1969. – 624 с.
10. *Kisielewicz M.* Differential inclusions and optimal control. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 260 p.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 09.04.2013

О. А. Бєлоусов

Диференціальні ігри з інтегральними обмеженнями та імпульсними керуваннями

Розглядаються ігрові задачі переслідування для лінійних систем із загальними опуклими інтегральними обмеженнями на керування. Пропонується розширення диференціальної гри за допомогою імпульсних керувань. Формулюється аналог умови Л. С. Понтрягіна, який дозволяє отримати достатні умови розв'язання задачі за певний гарантований час.

A. A. Belousov

Differential games under integral constraints with impulse controls

Linear systems under general convex integral constraints on controls are discussed. A generalization of differential games by means of impulse controls is proposed. An analog of Pontryagin's condition is formulated. On its basis, the sufficient conditions of the game termination in a certain guaranteed time are obtained.