УДК 539.421

М. Ф. Селіванов

Поширення тріщини у в'язкопружному тілі внаслідок прикладання навантаження до її берегів

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

В рамках лінійної теорії в'язкопружності побудовано визначальні рівняння для залежного від часу розміру тріщини нормального відриву. Внаслідок того, що силу прикладено симетрично до верхнього і нижнього берегів тріщини поза її центром, швидкості прямолінійного поширення її кінців різняться. Визначальні рівняння являють собою систему інтегрального рівняння та нерівності при поширенні в один бік (до досягнення в дальньому від сили кінці тріщини критичного значення розкриття) та систему двох інтегральних рівнянь при поширенні в обидва боки. На чисельному прикладі проілюстровано можливість такого варіанту поширення, коли відстані від кінців тріщини до точки прикладання сили зрівнюються аж при зупиненні поширення.

Велика кількість елементів конструкцій виготовляється з матеріалів, механічні характеристики яких залежать від часу. Під дією навантаження в таких матеріалах виникають та поширюються тріщини, що з часом призводить до руйнування елемента конструкції. Аналіз довготривалого зростання тріщини є ключовим аспектом надійного прогнозування часу до руйнування.

Для дослідження довготривалого поширення тріщини в роботі застосовується теорія докритичного поширення тріщини у в'язкопружному середовищі [1]. В основу цієї моделі покладена δ_c-модель тріщини Леонова–Панасюка [3], згідно з якою перед вершиною тріщини з кінцями в точках $x = a$ і $x = b$ вводиться зона послаблених зв'язків (область передруйнування) у вигляді розрізів довжиною d_a і d_b.

Довжини розрізів на продовженні тріщини знаходяться в ході розв'язання задачі з умови скінченності напружень в точках зовнішніх границь додаткових розрізів.

Застосування теорії докритичного зростання тріщини у випадку нормального відриву вимагає визначення величини пружного розкриття $\delta_{\rm I}(x) = 2v(x; L, a, b, \sigma, p)$ в обох вершинах фізичної тріщини, тобто при $x = a$ і $x = b$ (L — пружні характеристики матеріалу; p — інтенсивність зовнішнього навантаження; $v(x)$ — вертикальне переміщення берегів тріщини). Тоді критерій руйнування набуде вигляду

$$\max_{x=a,b}\{\delta_{\rm I}(x; L, a, b, \sigma, p_*)\} = \delta_{\rm Ic}, \tag{1}$$

де p_* — значення інтенсивності зовнішнього навантаження, при досягненні якого тріщина почне зростати; $\delta_{\rm Ic}$ — критичне розкриття тріщини (в роботі ми будемо користуватися константою $v_c = \delta_{\rm Ic}/2$). Критерій (1) дозволяє визначити рівень критичного навантаження p_*.

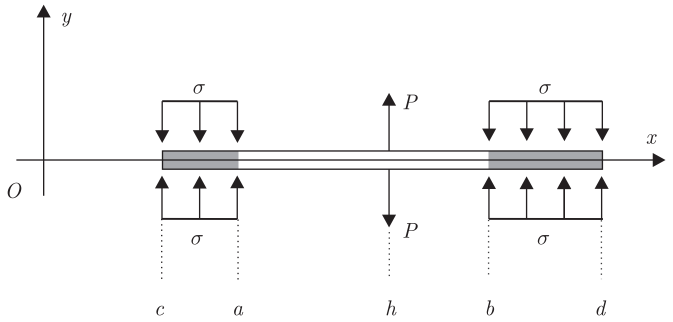

Рис. 1

В'язкопружне зміщення берегів на продовженні тріщини $v(a(t); L(t), a(t), b(t), \sigma, p)$ визначатимемо на основі розв'язку задачі про пружне переміщення. З цією метою використовуємо принцип пружно-в'язкопружної аналогії, що є аналогом принципу Вольтерра, який одержав обгрунтування для аналогічних задач в роботі [1]. Умовою застосування принципу Вольтерра є збільшення довжини тріщини з часом. Згідно з принципом Вольтерра, у виразі для зміщень берегів на продовженні тріщини замінимо пружні модулі $L(t)$ відповідними перетвореними величинами і скористаємося оберненим перетворенням.

При дослідженні повільного зростання тріщини, яке відбувається при докритичному рівні зовнішнього навантаження, критерій критичного розкриття (1) набуває форми

$$\begin{cases} \delta_{\mathrm{I}}(b(t); L(t), a_0, b(t), \sigma, p) = \delta_{\mathrm{Ic}}, \\ \delta_{\mathrm{I}}(a_0; L(t), a_0, b(t), \sigma, p) < \delta_{\mathrm{Ic}} \end{cases} \tag{2}$$

при зростанні тріщини в один з боків (вправо) і

$$\begin{cases} \delta_{\mathrm{I}}(a(t); L(t), a(t), b(t), \sigma, p) = \delta_{\mathrm{Ic}}, \\ \delta_{\mathrm{I}}(b(t); L(t), a(t), b(t), \sigma, p) = \delta_{\mathrm{Ic}} \end{cases} \tag{3}$$

при зростанні в обидва боки. З систем (2) і (3) при заданих релаксаційних властивостях матеріалу як функцій часу $L(t)$, рівні зовнішнього навантаження p і параметрі тріщиностійкості матеріалу σ знаходимо $a(t)$ і $b(t)$ — залежність положень границь тріщини від часу.

У роботі розглянемо випадок, коли поширення границь тріщини відбувається за рахунок зміни з часом релаксаційних властивостей матеріалу пластини $L(t)$ при сталому рівні зовнішнього навантаження p. Побудуємо визначальні рівняння для координат кінців фізичної тріщини як функцій часу.

Розв'язок задачі теорії пружності про переміщення берегів тріщини з прикладеним до її берегів зосередженим зусиллям. Переміщення берегів тріщини, одержані в рамках δ_c-моделі руйнування, мають вигляд

$$v(x) = L\sigma v_0(x), \tag{4}$$

де у випадку плоского напруженого стану $L = 4/E$ (E — модуль Юнга матеріалу пластини);

$$v_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left\{K_{x0}(x) + \frac{K_{x1}(x)}{\rho}\right\} - \tag{5}$$

функція геометричних параметрів та відносного параметра навантаження $\rho = \sigma/P$;

$$K_{x0}(x) = K_{x\triangle}(x,b) - K_{x\triangle}(x,a),$$

$$K_{x1}(x) = -x_h[2(e-h)\operatorname{arctg}\delta(x) + \widehat{X}(x)] - C_{x\triangle}(x,h),$$

$$K_{x\triangle}(x,\xi) = (x-\xi)C_{x\triangle}(x,\xi) - 2\widehat{X}(\xi)\operatorname{arctg}\delta(x),$$

$$C_{x\triangle}(x,\xi) = \ln\left|\frac{\delta(x)-\delta(\xi)}{\delta(x)+\delta(\xi)}\right|, \qquad x_h = \frac{1}{\widehat{X}(h)},$$

$$\widehat{X}(x) = \sqrt{(x-c)(d-x)}, \qquad \delta(x) = \sqrt{\frac{x-c}{d-x}}.$$

Зовнішні границі зон передруйнування c і d визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} \rho\Delta X_0 + (e-h)x_h = 0, \\ \rho B_0 - x_h = 0, \end{cases}$$

де $\Delta x_0 = \widehat{x}(b) - \widehat{x}(a)$, $B_0 = \pi - 2(\operatorname{arctg}\delta(b) - \operatorname{arctg}\delta(a))$.

Рівняння докритичного розвитку тріщини з прикладеним до її берегів зосередженим зусиллям. Інкубаційний період розвитку тріщини характеризується збільшенням вертикального переміщення берегів тріщини без зростання її довжини. Час закінчення інкубаційного періоду (позначаємо його t_0) визначається як час досягнення розкриттям в одній з вершин тріщини критичного значення. По закінченні інкубаційного періоду ініціюється початок зростання довжини тріщини. Покладаємо $h > (a+b)/2$. Таким чином, в момент часу t_0 вертикальне переміщення досягає свого критичного значення в правій вершині; t_0 можна визначити за допомогою рівняння

$$L(t)\sigma v_0(b_0) = v_{\rm c}.$$

Далі тріщина починає своє зростання вправо. Положення правого кінця $b(t)$ при $a(t) = a_0$ визначатимемо з рівняння

$$v(b(t),t) = v_{\rm c}, \tag{6}$$

доки $v(a_0,t) < v_{\rm c}$. В (6)

$$v(x,t) = L_0\sigma v_0[x;a(t),b(t)] + \int\limits_0^t L'(t-\tau)\sigma v_0[x;a(\tau),b(\tau)]\,{\rm d}\tau, \tag{7}$$

функція $v_0(x;a,b)$ визначена у (5), функція $L = 4/E$ характеризує зміну релаксаційних властивостей матеріалу від часу.

При досягненні величиною $v(a_0,t)$ критичного значення ініціюється зростання в лівий бік. Положення кінців тріщини $a(t) > a_0$ і $b(t)$ при зростанні в обидва боки будемо шукати з системи рівнянь

$$\begin{cases} v(a(t),t) = v_{\rm c}, \\ v(b(t),t) = v_{\rm c}. \end{cases}$$

Перейдемо до визначення релаксаційної характеристики $L(t)$.

В'язкопружний аналог модуля Юнга матеріалу в більшості випадків можна подати у вигляді

$$E(t) = E_\infty + \sum_i a_i \mathrm{E}_{\delta,1}(-b_i t^\delta), \tag{8}$$

де E_∞ — довготривале значення механічної характеристики, а її миттєве значення $E_0 - - E_\infty + \sum a_i$;

$$\mathrm{E}_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)} - \tag{9}$$

функція Міттаг–Леффлера; Γ — гамма-функція Ейлера. При $\delta = 1$ і $\gamma = 1$ функція (9) перетворюється на експоненту. Для якісного дослідження при врахуванні релаксаційних властивостей матеріалу будемо використовувати лише один доданок в (8). У цьому випадку модуль (8) в області зміни часу запишеться у вигляді

$$E(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty)\mathrm{E}_{\delta,1}(-bt^\delta). \tag{10}$$

Для побудови залежності від часу вертикального переміщення на лінії розташування тріщини скористаємося принципом пружно-в'язкопружної аналогії [2], замінюючи залежну від часу характеристику релаксації (10) відповідною перетвореною величиною

$$\widetilde{E}(s) = E_\infty + (E_0 - E_\infty)\frac{s^\delta}{s^\delta + b},$$

де $\widetilde{E}(s) = s\mathcal{L}\{E(t)\}$ — перетворення Лапласа–Карсона функції часу $E(t)$; s — параметр перетворення. Зображення Лапласа–Карсона функції $l(t) = L(t)/L_0 = E_0/E(t)$ та його обернене перетворення

$$\widetilde{l}(s) = k_1 + (1 - k_1)\frac{s^\delta}{s^\delta + \beta},$$

$$l(t) = k_1 + (1 - k_1)\mathrm{E}_{\delta,1}(-\beta t^\delta),$$

де $k_1 = E_0/E_\infty$, $\beta = b/k_1$, за допомогою функції $l(t)$ (7) можна переписати у вигляді

$$v(x,t) = L_0\sigma v_0[x; a(t), b(t)] + \int_0^t l'(t-\tau)L_0\sigma v_0[x; a(\tau), b(\tau)]\,\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

Чисельні розрахунки кінетики зростання тріщини з прикладеними до її берегів зусиллями. Всі чисельні розрахунки проведемо для матеріалу пластини з такими параметрами моделі (10):

$$E_0 = 4000 \quad \text{МПа}, \qquad k_1 = 10, \qquad \delta = 0{,}5,$$

а параметр b візьмемо таким, щоб інкубаційний період при заданих геометричних і силових параметрах задачі дорівнював одиниці. Тим самим вводимо безрозмірний час, який вимірюється долями інкубаційного періоду.

Перейдемо до визначення кінетики розвитку тріщини. Будемо шукати розв'язок рівняння (6) в моменти часу $t_k = t_0 + k\dot{\Delta} t$ $(k = 1, 2, \ldots)$. На кожному відрізку часу $[t_k, t_{k+1}]$ вважатимемо швидкість зростання функції $b(t)$ сталою:

$$b(t) = b_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{\Delta t}\Delta b_k, \qquad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k.$$

Рівняння (6) дозволяє визначити приріст Δb_k на k-му часовому проміжку. Це рівняння можна записати в формі

$$v(b_k, t_k) = v_{\text{c}},$$

$$b_k = b(t_k) = b_{k-1} + \Delta b_k,$$

або, згідно з (11), більш детально:

$$v_0[b_k; a_0, b_k] + \int\limits_0^{t_k} l'(t_k - \tau) v_0[b_k; a_0, b(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = \frac{v_{\text{c}}}{L_0\sigma}. \tag{12}$$

Це рівняння буде визначальним для b_k, доки величина

$$v(a_0, t_k) = L_0\sigma v_0[a_0; a_0, b_k] + \int\limits_0^{t_k} l'(t_k - \tau) L_0\sigma v_0[a_0; a_0, b(\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

менша за v_{c}. В іншому разі b_k, а також наступні значення шуканої функції b_{k+1}, $b_{k+2}, \ldots$ визначатимемо разом з відповідними $a_k = a_{k-1} - \Delta a_k$, a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots$ з системи

$$\begin{cases} v_0[a_k; a_k, b_k] + \displaystyle\int\limits_0^{t_k} l'(t_k - \tau) v_0[a_k; a(\tau), b(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = \frac{v_{\text{c}}}{L_0\sigma}, \\ v_0[b_k; a_k, b_k] + \displaystyle\int\limits_0^{t_k} l'(t_k - \tau) v_0[b_k; a(\tau), b(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = \frac{v_{\text{c}}}{L_0\sigma}. \end{cases} \tag{13}$$

При розрахунку кінетичних кривих взято такі значення параметрів моделі: $\sigma = 35$ МПа, $v_{\text{c}} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м.

На рис. 2, *а* наведено вертикальні переміщення берегів тріщини для вказаних значень безрозмірного часу. Початкові геометричні параметри задачі $a_0 = -0{,}5$ см, $b = 0{,}5$ см, точка прикладання зосередженого зусилля $h =0{,}1$ см, відносний силовий параметр $\rho = 2$.

Вертикальні переміщення в зонах передруйнування окремо винесено на рис. 2, *б*, на якому також проілюстровано принцип побудови кінетичних кривих.

При аналізі кінетичних кривих слід відзначити наступне. Можливим варіантом докритичного поширення тріщини внаслідок прикладання зосередженої сили до її берегів можна було б назвати такий: тріщина підростає до симетричної конфігурації $(h - a(t) = b(t) - h)$ і, починаючи з відповідного моменту часу, зростає з однаковою швидкістю в обидва боки. Для проведених числових розрахунків у рамках дослідженого інтервалу часу симетричної конфігурації досягти не вдалося: величина $b(t) - h - (h - a(t))$ для моменту часу $600t_0$ становила 0,003, змінюючись досить повільно. Тобто можна казати про

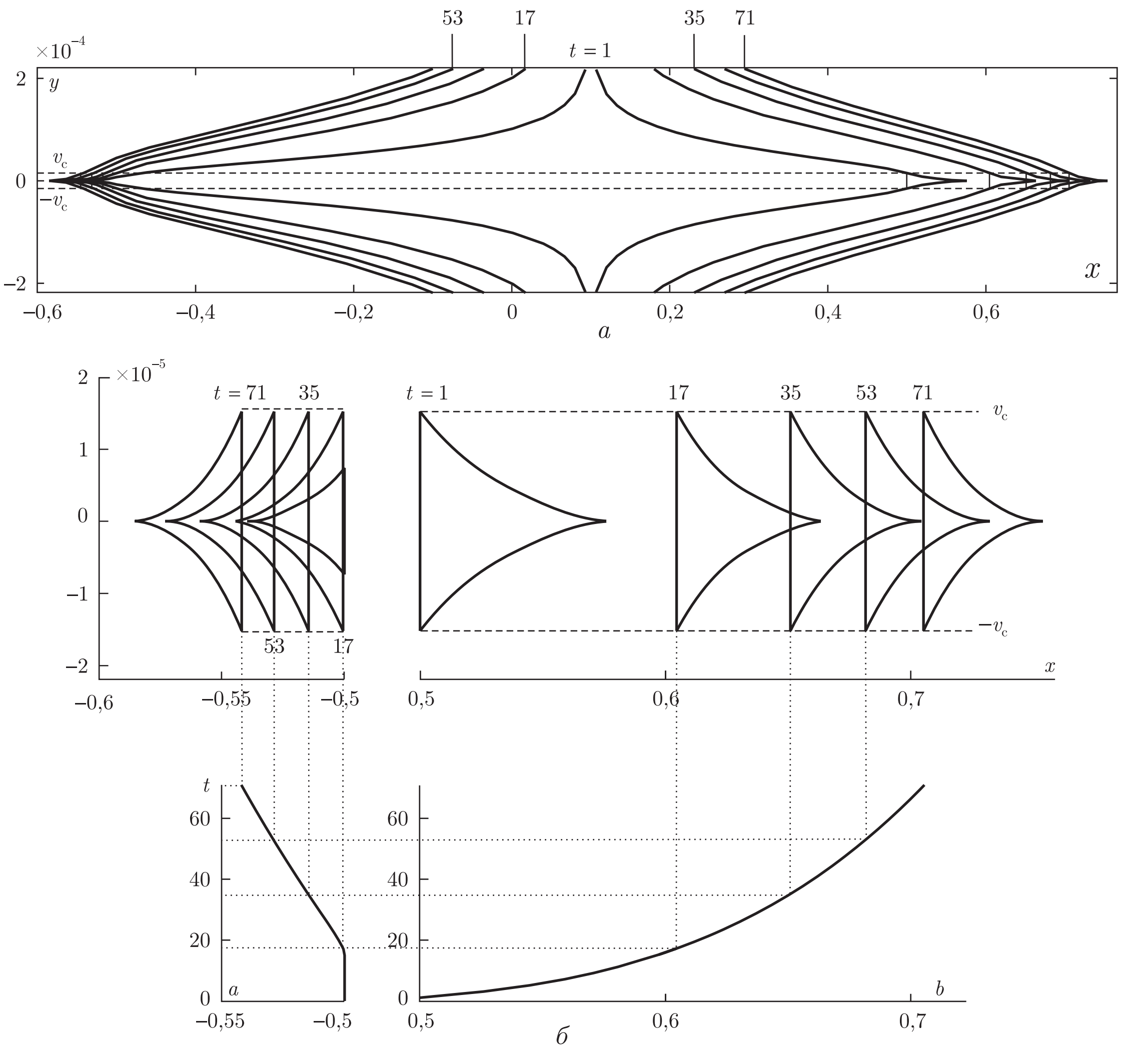

Рис. 2

такий варіант докритичного поширення, коли симетрична конфігурація не буде досягнута аж до зупинення тріщини (коли $L(t)$ наблизиться до граничного максимального значення).

1. *Каминский А. А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 310 с.
2. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – Москва: Мир, 1982. – 336 с.
3. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 30.05.2013

М. Ф. Селиванов

Распространение трещины в вязкоупругом теле вследствие приложения нагрузки к ее берегам

В рамках линейной теории вязкоупругости получены определяющие уравнения для зависимого от времени размера трещины нормального отрыва. Вследствие того, что силу приложено симметрично к верхнему и нижнему берегам трещины вне ее центра, скорости прямолинейного распространения концов трещины различны. Определяющие уравнения являются системой интегрального уравнения и неравенства при распространении в одну сторону (до достижения в дальнем от силы конце трещины критического раскрытия) и системой двух интегральных уравнений при распространении в обе стороны. На численном примере проиллюстрирована возможность такого варианта распространения, когда расстояния от концов трещины до точки приложения силы сравниваются при остановке трещины.

M. F. Selivanov

Propagation of a crack in the viscoelastic body due to loads on crack faces

Within the linear viscoelasticity theory, the constitutive relations for a time-dependent size of a mode I crack are obtained. If the force is applied symmetrically to the upper and lower crack faces out of the crack center, the propagation rates of the crack tips are different. The constitutive relations are the system of an integral equation and an inequality, when the crack grows in one direction (until the crack opening displacement reaches its critical value at the crack tip remote relative to the force), and a system of two integral equations, when the crack propagates in both directions. The numerical example shows a possibility of the crack propagation regime, when the distances from the crack tips to the force application point become equal at the crack arrest moment.