УДК 515.126,515.127

Т. В. Рибалкіна

Топологічна еквівалентність орієнтованих циклів лінійних відображень

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Одержано класифікацію орієнтованих циклів лінійних відображень над $\mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$ з точністю до топологічної еквівалентності. Дано канонічну форму матриць таких циклів відносно топологічної еквівалентності.

Ми розглядаємо проблему топологічної класифікації орієнтованих циклів лінійних відображень.

Нехай

$$\mathcal{A}: \qquad \begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "A_1"] & V_2 \arrow[r, "A_2"] & \dots \arrow[r, "A_{t-2}"] & V_{t-1} \arrow[r, "A_{t-1}"] & V_t \arrow[llll, bend left, "A_t"] \end{tikzcd} \tag{1}$$

та

$$\mathcal{B}: \qquad \begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "B_1"] & W_2 \arrow[r, "B_2"] & \dots \arrow[r, "B_{t-2}"] & W_{t-1} \arrow[r, "B_{t-1}"] & W_t \arrow[llll, bend left, "B_t"] \end{tikzcd} \quad — \tag{2}$$

два орієнтованих цикли лінійних відображень однакової *довжини* t над полем $\mathbb{F}$. Будемо казати, що система бієкцій $\varphi = \{\varphi_i\colon V_i \to W_i\}_{i=1}^{t}$ *перетворює* $\mathcal{A}$ *в* $\mathcal{B}$, якщо всі квадрати в діаграмі

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & V_2 \arrow[r, "A_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \dots \arrow[r, "A_{t-2}"] & V_{t-1} \arrow[r, "A_{t-1}"] \arrow[d, "\varphi_{t-1}"] & V_t \arrow[llll, bend left, "A_t"] \arrow[d, "\varphi_t"] \\ W_1 \arrow[r, "B_1"] & W_2 \arrow[r, "B_2"] & \dots \arrow[r, "B_{t-2}"] & W_{t-1} \arrow[r, "B_{t-1}"] & W_t \arrow[llll, bend left, "B_t"] \end{tikzcd}$$

комутативні; тобто

$$\varphi_2 A_1 = B_1 \varphi_1, \qquad \dots, \qquad \varphi_t A_{t-1} = B_{t-1} \varphi_{t-1}, \qquad \varphi_1 A_t = B_t \varphi_t.$$

Означення 1. Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ — цикли лінійних відображень вигляду (1) та (2) над полем $\mathbb{F}$.

(i) $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ називають *ізоморфними*, якщо існує система лінійних бієкцій, яка перетворює $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

(ii) $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ над $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$ називають *топологічно еквівалентними*, якщо

$$V_i = \mathbb{F}^{m_i}, \qquad W_i = \mathbb{F}^{n_i} \qquad \text{для всіх} \qquad i = 1, \ldots, t,$$

та існує система гомеоморфізмів, що перетворює $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. (Зауважимо, що згідно з вступом в [1], $m_1 = n_1, \ldots, m_t = n_t$.)

Прямою сумою циклів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ вигляду (1) та (2) називають цикл

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}: \quad \begin{tikzcd} V_1 \oplus W_1 \arrow[r, "A_1 \oplus B_1"] & V_2 \oplus W_2 \arrow[r, "A_2 \oplus B_2"] & \cdots \arrow[r, "A_{t-1} \oplus B_{t-1}"] & V_t \oplus W_t \arrow[lll, bend left, "A_t \oplus B_t"] \end{tikzcd}.$$

Вектор $\dim \mathcal{A} := (\dim V_1, \ldots, \dim V_t)$ називають *розмірністю* циклу $\mathcal{A}$. Цикл називають *нерозкладним*, якщо його розмірність ненульова та його не можна розкласти в пряму суму циклів меншої розмірності.

Цикл $\mathcal{A}$ називають *невиродженим*, якщо всі $A_1, \ldots, A_t$ є бієктивні, та *виродженим* в іншому випадку. Кожен цикл $\mathcal{A}$ можна розкласти таким чином:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{reg}} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_r, \tag{3}$$

де $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ — невироджений цикл та всі $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r$ — нерозкладні вироджені цикли. Алгоритм побудови розкладу (3) неорієнтованого циклу лінійних відображень над полем $\mathbb{C}$ з використанням тільки унітарних перетворень був описаний в [2].

Нижченаведена теорема, яка була отримана разом з В. В. Сергейчуком, зводить проблему топологічної класифікації орієнтованих циклів лінійних відображень до проблеми топологічної класифікації лінійних операторів.

Теорема 1. *(a) Нехай $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$ і нехай*

$$\mathcal{A}: \quad \begin{tikzcd} \mathbb{F}^{m_1} \arrow[r, "A_1"] & \mathbb{F}^{m_2} \arrow[r, "A_2"] & \cdots \arrow[r, "A_{t-2}"] & \mathbb{F}^{m_{t-1}} \arrow[r, "A_{t-1}"] & \mathbb{F}^{m_t} \arrow[llll, bend left, "A_t"] \end{tikzcd} \tag{4}$$

та

$$\mathcal{B}: \quad \begin{tikzcd} \mathbb{F}^{n_1} \arrow[r, "B_1"] & \mathbb{F}^{n_2} \arrow[r, "B_2"] & \cdots \arrow[r, "B_{t-2}"] & \mathbb{F}^{n_{t-1}} \arrow[r, "B_{t-1}"] & \mathbb{F}^{n_t} \arrow[llll, bend left, "B_t"] \end{tikzcd} \tag{5}$$

топологічно еквівалентні. Нехай

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{reg}} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_r, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{reg}} \oplus \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_s \quad -$$

їхні розклади вигляду (3). *Тоді невироджені частини $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ та $\mathcal{B}_{\text{reg}}$ топологічно еквівалентні, $r = s$ і (після перенумерації їхніх нерозкладних вироджених доданків) $\mathcal{A}_i$ та $\mathcal{B}_i$ ізоморфні для всіх $i = 1, \ldots, r$.*

(b) Кожен невироджений цикл $\mathcal{A}$ вигляду (4) *ізоморфний циклу*

$$\mathcal{A}': \quad \begin{tikzcd} \mathbb{F}^{m_1} \arrow[r, "\mathbb{1}"] & \mathbb{F}^{m_2} \arrow[r, "\mathbb{1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathbb{1}"] & \mathbb{F}^{m_{t-1}} \arrow[r, "\mathbb{1}"] & \mathbb{F}^{m_t} \arrow[llll, bend left, "A_t \cdots A_2 A_1"] \end{tikzcd}.$$

Якщо цикли (4) *та* (5) *невироджені, то вони топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли лінійні оператори* $A_t \cdots A_2A_1$ *та* $B_t \cdots B_2B_1$ *топологічно еквівалентні (як цикли* $A_t \cdots A_2A_1 \colon \mathbb{F}^{m_1} \to \mathbb{F}^{m_1}$ *та* $B_t \cdots B_2B_1 \colon \mathbb{F}^{n_1} \to \mathbb{F}^{n_1}$ *довжини 1).*

Зауважимо, що топологічна класифікація пар зустрічних лінійних відображень $V_1 \rightleftarrows V_2$ (тобто орієнтованих циклів довжини 2) була отримана в [3].

1. Орієнтовані цикли лінійних відображень з точністю до ізоморфізму. Побудуємо розклад (3) орієнтованого циклу лінійних відображень над довільним полем $\mathbb{F}$.

Класифікація циклів довжини 1, тобто лінійних операторів $V \to V$, випливає з теореми Фробеніуса (або Жордана, якщо поле $\mathbb{F}$ є алгебраїчно замкнене) про канонічну форму матриці відносно подібності. Орієнтовані цикли довжини 2, тобто пари зустрічних відображень $V_1 \rightleftarrows V_2$, класифіковані з точністю до ізоморфізму в [4, 5]. Класифікація циклів довільної довжини та з довільним напрямком стрілок добре відома в теорії представлень сагайдаків (див. [6, § 11]).

Для кожного $c \in \mathbb{Z}$ будемо позначати через $[c]$ натуральне число таке, що

$$1 \leqslant [c] \leqslant t, \qquad [c] \equiv c \bmod t.$$

Згідно з теоремою Фробеніуса, для кожного нерозкладного виродженого циклу $A \colon V \to V$ існує базис $e_1, \ldots, e_n$ простору V, в якому матриця відображення A буде виродженим жордановим блоком. Це означає, що базисні вектори утворюють *жордановий ланцюг*

$$e_1 \xrightarrow{A} e_2 \xrightarrow{A} e_3 \xrightarrow{A} \cdots \xrightarrow{A} e_n \xrightarrow{A} 0.$$

Аналогічно, кожен нерозкладний вироджений цикл $\mathcal{A}$ довільної довжини t визначає ланцюг

$$e_p \xrightarrow{A_p} e_{p+1} \xrightarrow{A_{[p+1]}} e_{p+2} \xrightarrow{A_{[p+2]}} \cdots \xrightarrow{A_{[q-1]}} e_q \xrightarrow{A_{[q]}} 0,$$

де $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant t$ та для кожного $l = 1, 2, \ldots, t$ множина $\{e_i \mid i \equiv l \bmod t\}$ є базисом простору V_l (див. [6, § 11]). Будемо казати, що цей ланцюг *закінчується в* $V_{[q]}$, якщо $e_q \in V_{[q]}$. Число $q - p$ називають *довжиною* ланцюга.

Лема 1. *Нехай*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\colon & V_1 \arrow[r, "A_1"] & V_2 \arrow[r, "A_2"] & \cdots \arrow[r, "A_{t-2}"] & V_{t-1} \arrow[r, "A_{t-1}"] & V_t \arrow[llll, bend left, "A_t"] \end{tikzcd} \quad -$$

орієнтований цикл лінійних відображень. Розглянемо його розклад (3).

(а) Позначимо

$$\widehat{A}_i \colon = A_{[i+t-1]} \cdots A_{[i+1]}A_i \colon V_i \to V_i$$

та зафіксуємо натуральне число z *таке, що*

$$\widetilde{V}_i := \widehat{A}_i^z V_i = \widehat{A}_i^{z+1} V_i \qquad \text{для всіх} \qquad i = 1, \ldots, t.$$

Нехай

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}}\colon & \widetilde{V}_1 \arrow[r, "\widetilde{A}_1"] & \widetilde{V}_2 \arrow[r, "\widetilde{A}_2"] & \cdots \arrow[r, "\widetilde{A}_{t-2}"] & \widetilde{V}_{t-1} \arrow[r, "\widetilde{A}_{t-1}"] & \widetilde{V}_t \arrow[llll, bend left, "\widetilde{A}_t"] \end{tikzcd} \quad -$$

цикл, утворений обмеженнями $\widetilde{A}_i\colon \widetilde{V}_i \to \widetilde{V}_{[i+1]}$ *відображень* $A_i\colon V_i \to V_{[i+1]}$*. Тоді* $\mathcal{A}_{\text{reg}} = \widetilde{\mathcal{A}}$ *(тобто невироджена частина однозначно визначається* $\mathcal{A}$*).*

(b) Числа

$$k_{ij} := \dim \operatorname{Ker}(A_{[i+j]} \cdots A_{[i+1]} A_i), \qquad i = 1, \dots, t \qquad \text{та} \qquad j \geqslant 0,$$

визначають вироджені доданки $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_r$ *розкладу (3) з точністю до ізоморфізму, оскільки кількість* n_{lj} $(l = 1, \dots, t$ *та* $j \geqslant 0)$ *вироджених доданків, що визначають ланцюги довжини* j*, які закінчуються в просторі* V_l*, можна обчислити за формулою*

$$n_{lj} = k_{[l-j],j} - k_{[l-j],j-1} - k_{[l-j-1],j+1} + k_{[l-j-1],j},$$

де $k_{i,-1} := 0$.

2. Класифікація лінійних операторів з точністю до топологічної еквівалентності. У цьому пункті встановлена класифікація лінійних операторів (тобто циклів довжини 1) $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$, з точністю до топологічної еквівалентності.

N. H. Kuiper та J. W. Robbin [7, 8] встановили критерій топологічної еквівалентності для лінійних операторів над $\mathbb{R}$, які не мають власних чисел, що є коренями з 1. T. Budnitska [9] встановила канонічну форму відносно топологічної еквівалентності для лінійного оператора над $\mathbb{C}$ та $\mathbb{R}$, який не має власних чисел, що є коренями з 1.

Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ визначимо $n \times n$ жордановий блок

$$J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Якщо кожен елемент $n \times n$ комплексної матриці $A = [a_{kl} + b_{kl} i]$, a_{kl}, $b_{kl} \in \mathbb{R}$, замінити на комплексно спряжений, то отримаємо матрицю

$$\overline{A} = [a_{kl} - b_{kl} i].$$

Якщо кожен елемент $a_{kl} + b_{kl} i$ матриці A замінити на дійсний блок

$$a_{kl} + b_{kl} i \qquad \longmapsto \qquad \begin{matrix} a_{kl} & -b_{kl} \\ b_{kl} & a_{kl}, \end{matrix} \tag{7}$$

то отримаємо $2n \times 2n$ дійсну матрицю, яку позначатимемо $A^{\mathbb{R}}$.

Кожна квадратна матриця A над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ подібна

$$A_0 \oplus A_{01} \oplus A_1 \oplus A_{1\infty}, \tag{8}$$

де всі власні числа λ матриці A_0 (відповідно, A_{01}, A_1 та $A_{1\infty}$) задовольняють умову

$$\lambda = 0 \qquad (\text{відповідно, } 0 < |\lambda| < 1,\ |\lambda| = 1 \text{ та } |\lambda| > 1).$$

Класифікацію лінійних операторів, які не мають власних чисел, що є коренями з 1, дає нижченаведена теорема, яка доведена в [9]; її частину (a) у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ довели N. H. Kuiper та J. W. Robbin [7, 8].

Теорема 2 [7, 8, 9]. *(a) Нехай $f(x) = Ax$ та $g(x) = Bx$ — лінійні оператори над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, які не мають власних чисел, що є коренями з 1; нехай матриці $A_0, \ldots, A_{1\infty}$ та $B_0, \ldots, B_{1\infty}$ визначені через A та B як у* (8).

(i) Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то f та g топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли

$$A_0 \text{ подібна } B_0,\ A_1 \text{ подібна } B_1$$

$$\text{розмір } A_{01} = \text{розмір } B_{01},\ \det(A_{01}B_{01}) > 0,$$

$$\text{розмір } A_{1\infty} = \text{розмір } B_{1\infty},\ \det(A_{1\infty}B_{1\infty}) > 0.$$

(ii) Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то f та g топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли

$$A_0 \text{ подібна } B_0,\ A_1 \oplus \overline{A}_1 \text{ подібна } B_1 \oplus \overline{B}_1,$$

$$\text{розмір } A_{01} = \text{розмір } B_{01},\ \text{розмір } A_{1\infty} = \text{розмір } B_{1\infty}.$$

(b) Кожен лінійний оператор над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, який не має власних чисел, що є коренями з 1, топологічно еквівалентний з лінійним оператором, матриця якого є прямою сумою, однозначно визначеною з точністю до перестановки доданків, що складається з:

(i) у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

довільного числа доданків

$$J_k(0), \qquad [1/2], \qquad J_k(\lambda)^{\mathbb{R}}, \qquad [2]$$

([1/2] *та* [2] *— це* 1×1 *матриці з елементами* $1/2$ *та* 2*) , де λ — комплексне число, модуль якого дорівнює* 1, *що визначене з точністю до заміни на комплексно спряжене $\overline{\lambda}$ та не є коренем з* 1, $J_k(\lambda)^{\mathbb{R}}$ *визначена в* (6) *та* (7),

не більше одного доданка $[-1/2]$,

не більше одного доданка $[-2]$*;*

(ii) у випадку $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$J_k(0), \qquad [1/2], \qquad J_k(\lambda), \qquad [2],$$

де λ — комплексне число, модуль якого дорівнює 1, що визначене з точністю до заміни на комплексно спряжене $\overline{\lambda}$ та не є коренем з 1.

Зауважимо, що проблему топологічної класифікації лінійних операторів, які мають власні числа, що є коренями з 1, частково вирішили N. H. Kuiper та J. W. Robbin [7, 8], S. E. Cappell та I. L. Shaneson [10–13], W. C. Hsiang та W. Pardon [14] та ін.

1. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1941. – 165 p.
2. *Sergeichuk V. V.* Computation of canonical matrices for chains and cycles of linear mappings // Linear Algebra Appl. – 2004. – **376**. – P. 235–263.
3. *Рибалкіна Т.* Топологічна класифікація пар зустрічних лінійних відображень // Мат. студії. – 2013. – **39**, № 1. – С. 21–28.
4. *Добровольская Н. М., Пономарев В. А.* Пара встречных операторов // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 6. – С. 81–86.
5. *Horn R. A., Merino D. I.* Contragredient equivalence: a canonical form and some applications // Linear Algebra Appl. – 1995. – **214**. – P. 43–92.
6. *Габриэль П., Ройтер А. В.* Представления конечномерных алгебр. – Москва: ВИНИТИ, 2003. – 224 с.
7. *Robbin J. W.* Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – **78**. – P. 923–952.

8. *Kuiper N. H., Robbin J. W.* Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. – 1973. – **19**, No 2. – P. 83–106.
9. *Budnitska T.* Topological classification of affine operators on unitary and Euclidean spaces // Linear Algebra Appl. – 2011. – **434**. – P. 582–592.
10. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Linear algebra and topology // Bull. Amer. Math. Soc., New Series 1. – 1979. – P. 685–687.
11. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Nonlinear similarity of matrices // Ibid. – 1979. – P. 899–902.
12. *Cappell S. E., Shaneson J. L., Steinberger M., West J. E.* Nonlinear similarity begins in dimension six // Amer. J. Math. – 1989. – **111**. – P. 717–752.
13. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Non-linear similarity and linear similarity are equivariant below dimension 6 // Contemp. Math. – 1999. – **231**. – P. 59–66.
14. *Hsiang W. C., Pardon W.* When are topologically equivalent orthogonal transformations linearly equivalent // Invent. Math. – 1982. – **68**, No 2. – P. 275–316.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.07.2013

Т. В. Рыбалкина

Топологическая эквивалентность ориентированных циклов линейных отображений

Получена классификация ориентированных циклов линейных отображений над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ с точностью до топологической эквивалентности. Дана каноническая форма матриц таких циклов относительно топологической эквивалентности.

T. V. Rybalkina

Topological equivalence of the oriented cycles of linear mappings

We classify the oriented cycles of linear mappings over $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ up to topological equivalence. We give a canonical form of the matrices of such cycles with respect to topological equivalence.