Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2013

*МЕХАНІКА*

УДК 517.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

# Об устойчивости движения при интервальных начальных условиях

*Рассматривается система уравнений возмущенного движения при интервальных начальных условиях. Для этого класса систем прямым методом Ляпунова получены необходимые и достаточные условия устойчивости движения.*

Одним из важных разделов аналитической механики является теория множества траекторий, включающая теорию траекторий материальных точек. Исследование траекторий механических систем восходит к трактату Лагранжа "Аналитическая механика". Особая роль в создании общей теории траекторий принадлежит А. Пуанкаре и А. М. Ляпунову, положившим начало новому направлению в исследованиях устойчивости движения. Областью применения результатов теории траекторий являются небесная механика, астродинамика, электронная оптика и др.

В данной работе исследуется задача об устойчивости движения при интервальных начальных условиях. Это понятие устойчивости близко к известному определению условной устойчивости, но не сводится к нему. При помощи прямого метода Ляпунова получены необходимые и достаточные условия устойчивости рассматриваемого типа. В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости при интервальных начальных условиях для квазилинейной системы. При этом метод функций Ляпунова применяется совместно с одним нелинейным интегральным неравенством.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу Коши для уравнений, имеющих одинаковую структуру правой части и интервальные начальные условия. А именно, рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \tag{2}$$

где $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ — интервал начальных значений, $f(t, x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $f(t, 0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Предполагаем, что движения системы, описываемые системой (1) при начальных условиях (2), определены при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Далее $X(t)$ обозначает множество траекторий системы (1), генерируемых интервальными начальными значениями $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, т. е.

$$X(t) = \left\{x(t)\colon \frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0,\ x_0 \in [\underline{x}_0,\ \overline{x}_0],\ t_0 \in [0,\infty)\right\}. \tag{3}$$

Для интервального вектора $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ векторная норма вводится так (см. [1, 2]):

$$\|Y\| = \max(|Y_1|, \ldots, |Y_n|),$$

где $|Y_i| = \max(|\underline{y}_i|, |\overline{y}_i|)$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приведем определения, необходимые для дальнейшего изложения результатов.

**Определение 1.** Нулевое решение системы (1) с интервальными начальными значениями (2) устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon \in (0, H)$ и $t_0 \geqslant 0$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что при $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \delta)$ выполняется оценка $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

**Определение 2.** Нулевое решение системы (1) интервально устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого решения $x(t, t_0, x_0) \in X(t)$, $x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ выполняется соотношение $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Если в определении 1 величина $\delta$ не зависит от $t_0$, то интервальная устойчивость нулевого решения будет равномерной по $t_0$.

Наряду с устойчивым нулевым решением системы (1) множество траекторий $X(t)$ может содержать особые точки, сепаратрисы и предельные циклы. Кроме того, для систем размерности $n > 2$ в системе (1) может появиться хаотический аттрактор, что влечет сложное поведение траекторий в его окрестности.

Представляет интерес получение условий устойчивости нулевого решения системы (1) при интервальных начальных значениях.

Для решения рассматриваемой задачи применяются функции Ляпунова со специальными свойствами. Эти дополнительные требования связаны с тем, что при рассмотрении интервальной устойчивости как начальные, так и последующие возмущения в системе (1) могут быть сколь угодно большими.

**Определение 3** (см. [3]). Функция $V(t, x)$ называется локально большой, если для любого $0 < c < \infty$ и $t_0 \geqslant 0$ существует $\Delta = \Delta(t_0, c) > 0$ такое, что вне сферы

$$G_\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| < \Delta\} \tag{4}$$

выполняется неравенство $V(t, x) > c$ при всех $t \geqslant t_0$.

**Определение 4.** Функция $V(t, x)$ называется определенно положительной, если она удовлетворяет условиям определения 3 и оценке $V(t, x) \geqslant W(x)$, где $W(x)$ — определенно положительная функция в смысле Ляпунова.

Пусть для системы (1) построена локально большая вспомогательная функция $V(t, x)$, $V \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, для которой определена полная производная

$$D^+V(t, x) = \limsup\{[V(t + h, x + hf(t, x)) - V(t, x)]h^{-1}\colon h \to 0^+\} \tag{5}$$

вдоль любого решения $x(t) \in X(t)$ задачи (1), (2).

**Теорема об интервальной устойчивости.** Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Для того чтобы нулевое решение системы* (1) *было интервально устойчивым, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

*1) для системы* (1) *должна существовать функция* $V(t,x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, $V(t,0) = 0$;

*2) функция* $V(t,x)$ *определенно положительная и локально большая;*

*3) функция* $V(t,x)$ *является убывающей до* 0 *функцией при* $t \to +\infty$ *вдоль любой траектории* $x(t,t_0,x_0) \in X(t)$ *системы* (1).

**Доказательство.** Пусть найдена функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям *1–3*. Покажем, что в этом случае нулевое решение системы (1) интервально устойчиво в смысле определения 2.

При $t_0 \in \mathbb{R}_+$ выберем $\varepsilon \in (0,H)$ и укажем число $\lambda > 0$ такое, что $V(t,x) > \lambda$ при $x^T x = \varepsilon^2$. В силу условия *2* теоремы 1 для функции $V(t,x)$ существует функция $W(x)$, $W(0) = 0$ при $x = 0$, такая, что $W(x) > 0$ при $x^T x \neq 0$ и $W(x) \leqslant V(t,x)$. Пусть $m = \min\{W(x)$ при $x^T x = \varepsilon^2\}$. Из свойства непрерывности $W(x)$ следует, что $m > 0$. Следовательно, при $x^T x = \delta^2$ функция $V(t,x) \geqslant m$. Пусть $\lambda \leqslant m$. Поскольку функция $V(t,x)$ непрерывна, найдется $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ такое, что $V(t_0,x) < \lambda$ при $x^T x = \delta^2$. Покажем, что выбранное так число $\delta(t_0,\varepsilon)$ соответствует величине $\varepsilon$, фигурирующей в определении 1.

Пусть $((x_0 \neq 0) \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \delta(t_0,\varepsilon))$. Тогда $0 < V(t_0,x_0) < \lambda$ и по условию *3* теоремы 1, функция $V(t,x(t))$ не возрастает при $t \geqslant t_0$. Поэтому $V(t,x_0(t)) < V(t_0,x_0)$ при $t \geqslant t_0$ и, следовательно, $V(t,x(t)) < \lambda$ при всех $t \geqslant t_0$. Отсюда следует, что траектория $x(t,t_0,x_0) \in X(t)$ и при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет оценке $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$. Если это не так, то найдется $\tau > t_0$ такое, что $\|x(\tau,t_0,x_0)\| = \varepsilon$. В этом случае должно быть $V(\tau,x_0) > \lambda$, что невозможно из-за оценки $V(t,x(t)) < \lambda$ при всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 и при начальном значении $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \delta(t_0,\varepsilon))$ решение $x(t,t_0,x_0)$ принадлежит $X(t)$.

Покажем, что любое решение $x(t,t_0,x_0) \in X(t)$ удовлетворяет соотношению $\|x(t,t_0,x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть это соотношение не выполняется. Тогда существует хотя бы один вектор $x^* \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, для которого

$$(x^* \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x^*\| < \delta(t_0,\varepsilon)),$$

и для траектории $x(t,t_0,x^*)$ найдется последовательность $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ такая, что

$$\|x(t_k,t_0,x^*)\| > \alpha > 0.$$

В этом случае, так как $V(t,x)$ удовлетворяет условию *2* теоремы 1, то $V(t_k,t_0,x^*) > \beta > 0$. Но это не возможно в силу условия *3* теоремы 1, поскольку $V(t,t_0,x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$. Этим достаточность условий теоремы 1 доказана.

Докажем необходимость условий теоремы 1. Пусть нулевое решение системы (1) при условиях *2* интервально устойчиво. Рассмотрим траекторию $x(t,t_0,x_0) \in X(t)$ системы (1) при условии, что $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0])$. Определим скалярную функцию [4]

$$V(t,x) = \sup_{\tau \geqslant 0} \|x(t+\tau,t,x)\|. \tag{6}$$

Ясно, что функция $V(t,x)$ определена при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times D$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Так как нулевое решение системы (1) интервально устойчиво, то найдется функция $a \in K$-классу Хана такая, что $\|x(t+\tau,t,x)\| \leqslant a(\|x\|)$ при всех $x \in D$. Поэтому получим $V(t,x) \leqslant a(\|x\|)$ и, кроме того, $\sup\limits_{\tau \geqslant 0} \|x(t+\tau,t,x)\| \geqslant \|x(t,t,x)\| = \|x\|$. Отсюда следует, что $\|x\| \leqslant V(t,x)$ и функция (6) определенно положительная.

Для любого решения $x(t) \in X(t)$ задачи (1), (2) верно соотношение

$$x(t+\tau,t,x(t)) = x(t+\tau,t_0,x_0) \tag{7}$$

при $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0])$.

Из соотношения (7) следует, что для $t_1 > t_2$ и $\Delta = t_1 - t_2$ выполняется последовательность оценок

$$\begin{aligned} V(t_1,x(t_1)) &= \sup_{\tau \geqslant 0} \|x(t_1+\tau,t_1,x(t_1))\| = \sup_{\tau \geqslant 0} \|x(t_1+\tau,t_0,x_0)\| = \\ &= \sup_{\tau \geqslant 0} \|x(t_2+\Delta+\tau,t_0,x_0)\| \leqslant \sup_{\tau \geqslant 0} \|x(t_2+\tau,t_0,x_0)\| = \sup_{\tau \geqslant 0} \|x(t_2+\tau,t_2,x(t_2))\| = \\ &= V(t_2,x(t_2)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $V(t,x(t))$ убывает до нуля вдоль любого решения $x(t) \in X(t)$ при выполнении соотношения $\|x(t,t_0,x_0)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, функция $V(t,x)$ в виде (6) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Этим доказательство теоремы завершено.

**Замечание 1**. Условие *3* теоремы 1 требует убывания функции $V(t,x)$ вдоль траекторий $x \in X(t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Поскольку функция $V(t,x)$ монотонна вдоль любой траектории $x(t) \in X(t)$, то производная (5) будет существовать при почти всех $t \geqslant t_0$ и условие *3* можно проверять на основе производной $D^+V(t,x)$ для системы (1).

Пример 1. Рассмотрим квазилинейную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{8}$$

$$x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \tag{9}$$

где $A(t)$ — $n \times n$-матрица с непрерывными и ограниченными элементами на $\mathbb{R}$ и $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Предположим, что:

1) максимальное собственное значение $\lambda_M(t)$, матрицы $(A^T(t) + A(t))$ удовлетворяет условию $\lambda_M(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ при всех $t \geqslant t_0$;

2) существует функция $\beta(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ и $p \in \mathbb{N} \setminus 1$ такие, что

$$\|f^T(t,x)x\| \leqslant \frac{1}{2}\beta(t)(x^Tx)^p$$

при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$.

При выполнении условий 1, 2 для функции $V(x) = x^Tx$ нетрудно получить оценку

$$V(x(t)) \leqslant V(x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_M(s)V(x(s))\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)(V(x(s)))^p ds,$$

из которой следует интегральное неравенство

$$u(t) \leqslant a + \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_M(s)u(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)u^p(s)\,ds, \qquad t \geqslant t_0, \tag{10}$$

где $a = \max\{V(x_0)$ при $x_0 \in [\underline{x}_0,\ \overline{x}_0]\}$. Применяя к неравенству (9) теорему 1.3.7 об интегральном неравенстве (см. [5], с. 34 и библиографию там), получаем оценку

$$u(t) \leqslant a\Biggl\{\exp\Biggl[(1-p)\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_M(s)ds\Biggr] - a^{p-1}(p-1)\int\limits_{t_0}^{t}\beta(s)\exp\Biggl[(1-p)\int\limits_{s}^{t}\lambda_M(\tau)d\tau\Biggr]ds\Biggr\}^{1/(1-p)} \tag{11}$$

при всех $t \in [t_0, t_0+h]$, $h = \mathrm{const} > 0$. При этом предполагается, что

$$a < \Biggl\{\exp\Biggl[(1-p)\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\lambda_M(s)ds\Biggr]\Biggr\}^{1/(p-1)}\Biggl\{(p-1)\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\beta(s)ds\Biggr\}^{-1/(p-1)}. \tag{12}$$

Из оценок (9), (10) следует, что если для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что из условий $(\|x_0\| < \delta)\bigcap(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]\})$ следует выполнение неравенства (11) и

$$a\Biggl\{\exp\Biggl[(1-p)\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_M(s)ds\Biggr] - a^{p-1}(p-1)\int\limits_{t_0}^{t}\beta(s)\exp\Biggl[(1-p)\int\limits_{s}^{t}\lambda_M(\tau)d\tau\Biggr]ds\Biggr\}^{1/(1-p)} < \varepsilon$$

при всех $t \geqslant t_0$, то нулевое решение системы (1) устойчиво при интервальных начальных условиях.

**Замечание 2.** Условие *2* теоремы 1 предполагает, что функция $V(t,x)$ должна быть локально большой. Лемма 3.1 [3, с. 23–24] позволяет решить вопрос о принадлежности функции $V(t,x)$ к классу локально больших.

**Замечание 3.** Неравенство (11) ограничивает длину интервала, на котором выполняется основное неравенство. Поэтому, строго говоря, полученные условия гарантируют устойчивость нулевого решения системы (8) на конечном интервале. Однако, если параметры системы (8) такие, что неравенство (11) выполняется на неограниченном интервале, тогда полученные условия являются достаточными для устойчивости по Ляпунову при интервальных начальных условиях.


1. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 243 с.
2. *Moore R. E.* Methods and applications of interval analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979. – 190 p.
3. *Мартынюк А. А.* Практическая устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1983. – 247 с.
4. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – Ленинград: Машиностороение, 1974. – 334 с.
5. *Мартынюк А. А., Гутовски Р.* Интегральные неравенства и устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 271 с.



*Институт механики им. С. П. Тимошенко*
*НАН Украины, Киев*



*Поступило в редакцию 11.06.2012*

Академік НАН України **А. А. Мартинюк**

## Про стійкість руху при інтервальних початкових умовах

*Розглядається система рівнянь збуреного руху при інтервальних початкових умовах. Для цього класу рівнянь за допомогою прямого методу Ляпунова встановлено необхідні і достатні умови стійкості руху.*

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

## On the stability of motion under interval initial data

*We investigate a class of mechanical systems, which are described by ordinary differential systems of equations with interval initial conditions. By using the method of Lyapunov functions, the necessary and sufficient conditions of the stability of motion are established.*