УДК 517.9

О. О. Покутний

Про розвинення методу рядів Неймана узагальненого обертання на спектрі оператора в просторах Банаха та Фреше

(Представлено членом-кореспондентом НАН України О. А. Бойчуком)

Узагальнено метод рядів Неймана на випадок операторів, що не обов'язково є стискуючими. Знято умову замкненості множини значень оператора, що розглядається.

Розглянемо рівняння

$$(I - A)x = y, \tag{1}$$

де $A\colon B \to B$ — лінійний обмежений оператор, B — простір Банаха з нормою $\|\cdot\|$ (або Фреше зі зліченним набором напівнорм $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$) такий, що існує стала $c > 0$: $\|A^n\| \leqslant c$, $n \in \mathbb{N}$ (для будь-якої напівнорми $\|\cdot\|_m$ існує напівнорма $\|\cdot\|_k$ така, що $\|A^n x\|_m \leqslant c\|x\|_k$), $\overline{0} \in B$. Для спрощення викладення розглядатимемо випадок, коли B — рефлексивний банахів простір. Про можливе узагальнення на випадок більш загальних топологічних векторних просторів та послаблення умови рівномірної обмеженості степенів оператора A буде викладено в п. 2 роботи. Основною метою даної роботи є встановлення того факту, що рівняння (1) можна зробити завжди розв'язним у певному сенсі (але не обов'язково однозначно розв'язним). У тому випадку, коли рівняння (1) має розв'язки в класичному та сильному узагальненому сенсах їх можна подати у вигляді рівномірно збіжних рядів або збіжних до них послідовностей. Завдяки процесові поповнення [1] вдається відмовитися від умови замкненості підпростору $R(I-A)$, де через $R(I-A)$ позначено множину значень оператора $I-A$. Через $N(I-A)$ позначатимемо ядро оператора $I-A$.

1. Основний результат. Перейдемо до вивчення рівняння (1) в рефлексивному банаховому просторі. Найцікавішим випадком для рівняння (1) є так званий критичний випадок, коли $\mu = 1$ — точка спектра оператора A (оператор $\mu I - A$ не має оберненого). Виявляється, що в цьому випадку вихідне рівняння буде розв'язним не при всіх правих частинах, а його розв'язок може бути не єдиним (можлива навіть нескінченна кількість розв'язків у такого рівняння).

З умови рівномірної обмеженості степенів оператора A випливає [2], що виконується такий розклад простору B у пряму суму:

$$B = N(I - A) \oplus \overline{R(I - A)}. \tag{2}$$

У праці [3] введено поняття відносного спектра оператора й серед іншого для випадку матриць й операторів [3] доведено низку тверджень стосовно узагальненого обертання оператора $I - A$. Переформулюємо деякі з отриманих результатів у вигляді теореми, яку потім буде зручно використовувати для дослідження розв'язності рівняння (1). Для цього введемо позначення для усередненого оператора й нагадаємо його властивості

$$A_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k}{n}, \qquad A_0 A = A A_0 = A_0^2 = A_0, \qquad N(A_0) = \overline{R(I-A)}.$$

Теорема 1. *Нехай $R(I-A) = \overline{R(I-A)}$ й степені оператора A є рівномірно обмеженими. Тоді:*

a) $\mu = 1 \in \rho_{NS}(A)$ (відносно регулярна точка);

b) оператор $I - A + A_0$ є оборотним, а оператор $I - A$ є узагальнено-оборотним й $(I-A)^- = (I - A + A_0)^{-1} - A_0$;

c) рівняння (1) *розв'язне для тих й тільки тих y, які задовольняють умову*

$$A_0 y = \overline{0}; \tag{3}$$

d) якщо умова (3) *виконана, то множина розв'язків рівняння* (1) *матиме вигляд*

$$x = A_0 c + G[y], \qquad \forall\, c \in B, \tag{4}$$

де

$$G[y] = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (A - A_0)^l \right\}^{k+1} y - A_0 y \quad - \tag{5}$$

узагальнений оператор Гріна, для будь-якого $0 < \mu - 1 < 1/\|R_\mu(A)\|$.

Дослідимо тепер операторне рівняння (1) в загальному випадку (без умови замкненості). Покажемо, що його завжди можна зробити розв'язним в певному сенсі.

1. Класичні розв'язки. Припустимо, що множина значень оператора $I - A$ замкнена, тобто $R(I-A) = \overline{R(I-A)}$. Тоді справджується теорема 1 й умова $y \in R(I-A)$ рівносильна (3) $A_0 y = \overline{0}$. При виконанні цієї умови множина розв'язків рівняння (1) матиме вигляд (4).

2. Сильні узагальнені розв'язки. Розглянемо випадок, коли $R(I-A) \neq \overline{R(I-A)}$. Нехай $y \in \overline{R(I-A)}$. Ця умова в даному випадку також рівносильна умові $A_0 y = \overline{0}$ [2]. Оскільки ядро $N(I-A)$ оператора $I - A$ є доповнювальним підпростором у B (це випливає з розкладу в пряму суму (2)), то можна розглянути фактор-простір по ядру оператора $I - A$. Профакторизуємо простір B по ядру $N(I-A)$ й позначимо відповідний фактор-простір через $E = B/N(I-A)$. Нехай $\mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}}$, $\mathcal{P}_{N(I-A)}$ — проектори на підпростори $\overline{R(I-A)} \subset B$ та $N(I-A)$ відповідно. Тоді профакторизований оператор

$$\mathcal{I} - \mathcal{A} = \mathcal{P}_{\overline{R(I-A)}} (I - A) j^{-1} \colon E \to R(I-A) \subset \overline{R(I-A)}$$

буде лінійним, неперервним та ін'єктивним. Тут $j\colon B \to E$ — канонічна проекція [4]. Трійка (B, E, j) є локально тривіальним розшаруванням з типовим шаром $B_1 = \mathcal{P}_{N(I-A)} B$. Це дає можливість ввести поняття сильного узагальненого розв'язку [1, с. 26, 29] для рівняння

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x} = y, \qquad \overline{x} \in E. \tag{6}$$

Використаємо тепер процес поповнення за нормою $\|\overline{x}\|_{\overline{E}} = \|(\mathcal{I} - \mathcal{A})\overline{x}\|_F$, де $F = \overline{R(I - A)}$ [1]. Тоді отриманий розширений оператор $\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})}\colon \overline{E} \to \overline{R(I - A)}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{E}$ й $\overline{R(I - A)}$. З урахуванням конструкції сильного узагальненого розв'язку [1] рівняння

$$\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})}\overline{x} = y$$

матиме єдиний узагальнений розв'язок $\overline{(\mathcal{I} - \mathcal{A})}^{-1} y$, який позначатимемо через $\widetilde{c} \in \overline{E}$, й простір E буде щільно вкладеним в $\overline{E}$. Внаслідок щільності вкладення існує послідовність $\widetilde{c}_n \in E$ класів еквівалентності, яка буде збігатися до $\widetilde{c}$ за нормою $\overline{E}$. Обираючи по представнику з кожного класу $c_n \in \widetilde{c}_n$, отримаємо, що вона збігається до узагальненого розв'язку $\widetilde{c}$. Така послідовність буде сильним майже розв'язком [1]. Усі сильні майже розв'язки операторного рівняння (1) можна записати у вигляді $\{c_n + \mathcal{P}_{N(I-A)}c\}_{n\in\mathbb{N}}$, для будь-якого $c \in B$ або, що те саме, $\{c_n + A_0 c\}_{n\in\mathbb{N}}$. Якщо $y \in \overline{R(I - A)}$, то існує послідовність $y_n \in R(I - A)$, що до неї збігається. Тоді $G[y_n]$ буде збігатися до $G[y]$ і як c_n можна обрати $G[y_n]$. Таким чином, і узагальнений оператор Гріна $G[y]$ можна розширити до $\overline{G}[y]$. Відзначимо, що якщо $y \in R(I - A)$, то сильні узагальнені розв'язки будуть класичними.

3. Сильні псевдорозв'язки. Розглянемо елемент $y \notin \overline{R(I - A)}$. Ця умова рівносильна тому, що $A_0 y \neq \overline{0}$. У цьому випадку рівняння (1) не має ані класичних, ані сильних узагальнених розв'язків, але існують елементи з $\overline{B} = N(I - A) \oplus \overline{X}$, що мінімізують норму відповідної нев'язки $\|\overline{(I - A)}c - g\|_{\overline{B}}$ (простір $\overline{X}$ ізометрично ізоморфний простору $\overline{E}$, а оператор $\overline{I - A}$ є відповідним розширенням оператора $I - A$). А саме [5]:

$$c = (\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} y + A_0 \overline{c}, \qquad \forall \overline{c} \in B.$$

Ці елементи й будемо називати псевдорозв'язками.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 2. *Нехай в рівнянні* (1) *лійнійний обмежений оператор A, що діє в рефлексивному просторі Банаха або Фреше, такий, що його степені рівномірно обмежені. Тоді:*

(а) рівняння (1) *має класичні або сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова* (3) — $A_0 y = \overline{0}$*; якщо $y \in R(I - A)$, то розв'язки рівняння* (1) *будуть класичними;*

(б) якщо умова (3) *виконується, то множину розв'язків рівняння* (1) *можна зобразити у вигляді операторного ряду*

$$x = A_0 c + \overline{G}[y],$$

де $\overline{G}[y]$ — відповідне розширення (5)*;*

(в) якщо умова (3) *не виконується, то рівняння* (1) *має множину псевдорозв'язків, яку можна подати у вигляді*

$$x = A_0 c + G[y],$$

де $G[y] = (\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} y$.

Зауваження. Якщо $\|A\| < 1$, то оператор $A_0 = \overline{0}$, у формулі (5) можна зробити граничний перехід, коли $\mu \to 1$, й отримаємо ряд Неймана. У цьому випадку буде існувати єдиний класичний розв'язок. Таким чином, отримані результати узгоджуються з існуючими.

2. Зауваження щодо посилення результатів. Наведемо відому теорему [6], з якої буде видно яким чином можна узагальнити отримані в попередньому пункті результати.

Теорема [6, с. 964]. *Нехай E — віддільний локально опуклий простір, u — його неперервний ендоморфізм і*

$$A_n = \frac{1 + u + u^2 + \cdots + u^n}{n}.$$

Припустимо, що

(a) множина $\{A_n(x)\colon n = 1, 2, \ldots\}$ відносно слабко компактна в E для кожного $x \in E$;

(a′) множина $\{A_n\}$ рівностепенево неперервна;

(b) $\lim\limits_n n^{-1}u^n(x) = 0$ в слабкій топології для кожного $x \in E$.

Тоді:

1) E — топологічна пряма сума підпросторів $N(1-u)$ та $\overline{R(1-u)}$;

2) якщо π — проектування E на $N(1-u)$ паралельно $\overline{R(1-u)}$, то $\lim\limits_n A_n(x) = \pi(x)$ в слабкій топології для кожного $x \in E$.

Нарешті, якщо умова (b) виконана при заміні слабкої топології вихідною, то те саме залишається вірним й для твердження 2.

За цих умов після факторизації за схемою, проведеною вище, та поповнення за топологією індукованою системою напівнорм (детальніше в [1, с. 47, 116]) можна вважати, що оператор $1-u$ має замкнену множину значень. Тоді з розкладу (2) буде випливати, що оператор $1-u$ узагальнено-оборотний з узагальнено-оберненим оператором $(1-u)^{-}$. У цьому випадку множина розв'язків рівняння $(1-u)x = y$ матиме вигляд $x = \pi(c) + (1-u)^{-}y$. У випадку загальних локально опуклих просторів зображення у вигляді збіжного операторного ряду може не бути. Для отримання такого зображення в [3] використовується теорема Банаха про обернений оператор для $(1 - u + \pi)$, яка виконується не завжди. В ультрабочкових, бочкових та просторах Фреше ця теорема виконується і розклад, аналогічний (4), буде справедливим. Якщо простір B буде бочковим, то з умови (a) теореми випливає умова (a') [6, с. 965] й останню можна прибрати. Якщо простір E є простором Фреше або нормованим, u — слабко компактний ендоморфізм, степені якого рівностепенево неперервні, то зі слабкої компактності випливає умова (a), й умова (b) виконується у вихідній топології. Саме такі простори найчастіше й виникають у рівняннях математичної фізики. Якщо E — простір Банаха (або Фреше) й умову (b) замінити умовою $n^{-1}\|u^n\| \to 0$ або більш слабкою умовою $\|u^n\| \leqslant c$ (у просторі Фреше відповідна збіжність буде індукована зліченною системою напівнорм, що породжують топологію простору), то умова (a') буде автоматично виконана. Нарешті в рефлексивних просторах умову (a) можна прибрати. Відзначимо також, що в роботі [7] метод рядів Неймана поширено на випадок правильних операторів за більш сильних умов. Зауважимо також, що якщо оператор у правій частині (1) замінити на довільний обмежений оператор B, що діє з гільбертового простору H_1 в H_2, то можна повністю дослідити розв'язність рівняння (1). А саме, можна довести, що довільний обмежений оператор після процесу поповнення, аналогічного описаному вище, має узагальнений псевдообернений.

1. *Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Обобщенные решения операторных уравнений. – Москва: Диалектика, 2009. – 185 с.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
3. *Biletskyi B. A., Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Periodic problems of difference equations and ergodic theory // Abstract Appl. Anal. – 2011. – Article ID 928587, 12 p.

4. *Атья М.* Лекции по K-теории. – Москва: Мир, 1967. – 261 с.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
6. *Эдвардс Р. Э.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1969. – 1071 с.
7. *Lyashko S. I., Semenov V. V.* On a theorem of M. A. Krasnoselski // Cybern. and System Anal. – 2010. – **46**, No 6. – P. 1021–1025.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 26.06.2012

А. А. Покутный

Про развитие метода рядов Неймана обобщенного обращения на спектре оператора в пространствах Банаха и Фреше

Обобщен метод рядов Неймана на случай нерастягивающих операторов. Снято условие замкнутости множества значений рассматриваемого оператора.

O. O. Pokutnyi

Development of the Neimann's series method of generalized invertibility on the spectrum of an operator in Banach and Fréchet spaces

A generalization of the Neimann's series method to the case of non-contractive operators is presented. The condition of closedness for the set of values of the operator under consideration is removed.