



УДК 532.5

В. А. Каліон, Є. Ю. Таран, О. М. Дідківська

Математичне моделювання руху тривісного еліпсоїда в капілярі, що заповнений в'язкою рідиною

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. І. Нікішовим)

Розглядається використання теорії змащування й методу збурень для розв'язання задачі про рух крові у дуже вузьких капілярах. Еритроцит і плазма крові моделюються тривісним еліпсоїдом та ньютонівською в'язкою рідиною відповідно. Результати порівнюються з результатами інших авторів.

Експериментальні дослідження процесів поширення поживних речовин в організмі людини зустрічаються з істотними труднощами, що обумовлені малими розмірами досліджуваних об'єктів, похибками вимірів і, що особливо неприємно, неможливістю виміряти безпосередньо деякі параметри, як, наприклад, тиск плазми між еритроцитом та стінкою капіляра, натяг мембрани еритроцита при його переміщенні по дрібних судинах тощо. Застосування математичного моделювання й обчислювальних засобів при дослідженні поширення речовин (особливо кисню) в організмі дозволило подолати ці труднощі й знайти ефективні підходи до розв'язання проблеми транспорту речовин в організмі людини. У зв'язку з обмеженістю можливостей комп'ютерів важливим є питання оптимізації розв'язання подібних математичних моделей.

До цього часу при моделюванні руху еритроцитів у вузьких капілярах усі автори використовують осесиметричні моделі [1, 3–5]. Використання осесиметричної моделі як моделі еритроциту пов'язано з роботою Дж. М. Фітц-Джеральда [3], який вперше побудував математичну модель і поставив задачу про усталений рух тривісного еліпсоїда у вузькому циліндричному капілярі. В роботі [3], зокрема, було показано, що з плином часу неосесиметрична форма еритроцита переходить в осесиметричну. В той же час на всіх відомих мікрофотографіях [2] видно, що більшість еритроцитів у капілярах має суто неосесиметричну форму.

Проведені в роботі дослідження дозволяють оцінити внесок “осесиметричності” у витратні характеристики течії крові у вузьких капілярах та пояснити невідповідність математичної моделі Фітц-Джеральда й картини руху реальних еритроцитів.

© В. А. Каліон, Є. Ю. Таран, О. М. Дідківська, 2013

Метод дослідження. Вивчається течія рідини у щілині шириною $H(\varphi, Z) = R_0 - R_E(\varphi, Z) \ll R_0$, яка утворена стінкою капіляра та еліпсоїдом з осями $2A, 2B, 2C$, що моделює еритроцит. За припущень теорії мастильного шару течія описується системою рівнянь Рейнольдса, яка в циліндричній системі координат (R, φ, Z) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\mu}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_Z}{\partial R} \right), \\ \frac{\partial(RV_R)}{\partial R} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(RV_Z)}{\partial Z} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут R_0 — радіус капіляра; $R_E(\varphi, Z)$ — форма поверхні еритроцита; V_R, V_φ, V_Z — компоненти швидкості течії; P — тиск; μ — в'язкість плазми крові.

Крайові умови для рівнянь (1) у системі відліку, що пов'язана з центром еліпсоїда, записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} R = R_0, \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = -W_E, \\ R = R_E(\varphi, Z), \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де W_E — постійна швидкість руху еліпсоїда в нерухомій системі координат.

При розв'язанні крайової задачі (1), (2) використовуються безрозмірні змінні

$$\begin{aligned} r = \frac{R}{R_0}, \quad z = \frac{Z}{R_0}, \quad v_r = \frac{V_R}{V_*}, \quad v_\varphi = \frac{V_\varphi}{V_*}, \quad v_z = \frac{V_Z}{V_*}, \\ p = \frac{PR_0}{\mu V_*}, \quad r_E = \frac{R_E}{R_0}, \quad w_E = \frac{W_E}{V_*}; \end{aligned}$$

тут V_* поки що не визначена. Рівняння (1) та крайові умови (2) при цьому стають

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$r = 1, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = -w_E; \quad r = r_E(\varphi, z), \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = 0. \quad (4)$$

Подвійне інтегрування другого й третього рівнянь системи (3) за змінною r , з урахуванням (4), дозволяє отримати явні залежності між компонентами швидкості v_φ, v_z (v_r визначається із рівняння нерозривності) й градієнта тиску p . Тиск, в свою чергу, може бути визначений із крайової задачі

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[F(\eta_1) \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial z} \left[F(\eta_2) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [G(\eta_2)], \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -c < z < c, \quad (5)$$

$$z = -c, \quad p = 0; \quad z = c, \quad p \text{ const} = -\Delta p; \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad (6)$$

де

$$F(\eta) = - \left[\frac{1 - \eta^2}{2} + \frac{(1 - \eta)^2}{\ln \eta} \right], \quad G(\eta) = \frac{1 - \eta}{\ln \eta}, \quad (7)$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_{20}}{1 - \varepsilon \sin^2 \varphi}, \quad \eta_{20} = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad \varepsilon = 1 - \frac{a^2}{b^2}, \quad \eta_1 = \sqrt{\eta_2}, \quad \eta_{10} = \sqrt{\eta_{20}}. \quad (8)$$

Тут $a = A/R_0, b = B/R_0, c = C/R_0$.

Однак вирази для компонент швидкості, рівняння (5) й крайові умови (6) містять додаткові невідомі: швидкість еліпсоїда w_E й різницю тисків на кінцях еліпсоїда Δp . Для їх визначення використані дві додаткові інтегральні умови. Перша є наслідком умови сталості швидкості руху тіла в капілярі, що вимагає, в свою чергу, щоб проекція на вісь z головного вектора гідродинамічних сил, які діють на тіло, була нульовою. Друга — умови незмінності витрати рідини через довільний переріз капіляра.

Хоча остання умова вносить нову невідому — витрату рідини через довільний переріз капіляра w_m , вибір масштаба швидкості $V_* = W_E$ дозволяє зафіксувати величину швидкості тіла ($w_E = 1$) й не збільшувати кількість невідомих.

З урахуванням (7), (8) інтегральні умови набувають вигляду

$$2 \int_0^{\pi/2} \int_{-c}^c \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} \left[G(\eta_2) + (\eta_2 + G(\eta_2)) \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{4}{\ln \eta_2} \left[1 + \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} dz d\varphi = 0, \quad (9)$$

$$w_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial p}{\partial z} F(\eta_2) d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} G(\eta_2) d\varphi. \quad (10)$$

де w_m — безрозмірна витрата рідини в довільному перерізі капіляра.

Рівняння (5), співвідношення (7), (8) та інтегральні умови (9), (10) містять малий параметр ε . Припускаючи $a \leq b$, маємо $0 \leq \varepsilon < 1$. Розглядаючи випадок $\varepsilon \ll 1$, розв'язок крайової задачі (5), (6) можна отримати методом збурень.

Оскільки розвинення в ряд за малим параметром ε функцій, що входять у рівняння (5) під знаком похідної, можна подати як

$$F(\eta_k) = F(\eta_{k0}) + \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \varphi \eta_{k0} F'(\eta_{k0}) + \frac{\varepsilon^2}{8} \sin^4 \varphi [\eta_{k0}^2 F''(\eta_{k0}) + 3\eta_{k0} F'(\eta_{k0})] + \dots, \quad (11)$$

$$G(\eta_2) = G(\eta_{20}) + \varepsilon \sin^2 \varphi \eta_{20} G'(\eta_{20}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^4 \varphi [\eta_{20}^2 G''(\eta_{20}) + 2\eta_{20} G'(\eta_{20})] + \dots, \quad (12)$$

то розв'язок крайової задачі (5), (6) слід шукати у вигляді

$$p(\varphi, z) = \psi_0(z) + \varepsilon [\psi_1(z) \sin^2 \varphi + g_1(z)] + \frac{\varepsilon^2}{2} [\psi_2(z) \sin^4 \varphi + g_2(z) \sin^2 \varphi + k_2(z)] + \dots. \quad (13)$$

У розвиненні (11) $k = 1, 2$. Слід відзначити, що крайові умови при $\varphi = 0$ й $\varphi = \pi/2$ при цьому виконуються автоматично.

Підставляючи (11)–(13) у рівняння (5) і крайові умови (6) і збираючи члени з однаковими степенями ε й $\sin^2 \varphi$, отримаємо низку крайових задач для визначення функцій $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $g_1(z)$, $\psi_2(z)$, $g_2(z)$, $k_2(z)$, ... Крайові умови в цих задачах включають невідомі інтегральні параметри — витрату рідини в довільному перерізі капіляра w_m та різницю тисків Δp на кінцях еліпсоїда. Із інтегральних умов (9), (10) ці інтегральні параметри з точністю до малих другого порядку можуть бути наведені у вигляді

$$w_m = w_{m0} + \varepsilon w_{m1}, \quad \Delta p = \Delta p_0 + \varepsilon \Delta p_1. \quad (14)$$

У нульовому наближенні, що відповідає еліпсоїду обертання, маємо

$$w_{m0} = -\frac{\int_{-c}^c \left[\frac{G^2(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} + \frac{1}{\ln \eta_{20}} \right] dz}{\int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz}, \quad \Delta p_0 = -4 \left[w_{m0} \int_{-c}^c \frac{dz}{F(\eta_{20})} + \int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz \right]. \quad (15)$$

Як і у випадку нульового наближення, визначення інтегральних характеристик у першому наближенні зводиться до квадратур.

Знаходження інтегральних параметрів w_m та Δp дозволяє визначити в явному вигляді крайові умови для рівнянь, із яких знаходяться $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $g_1(z)$, і розв'язати для цих функцій відповідні крайові задачі. Для розв'язання цих задач використовувався метод стрільби, за процедурою якого на відріжку $-c \leq z \leq c$ були розв'язані такі задачі Коші:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dz} &= 4 \frac{w_{m0} + G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})}, & \frac{d\psi_1}{dz} &= \frac{1}{F(\eta_{20})} \left[u - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20}) \right], \\ \frac{dg_1}{dz} &= \frac{8w_{m1} - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20})}{2F(\eta_{20})} - \frac{1}{2} \frac{d\psi_1}{dz}, & \frac{du}{dz} &= 32F(\eta_{10})\psi_1, \end{aligned} \quad (16)$$

$$z = -c, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad g_1 = 0, \quad u = u_0,$$

де u_0 — параметр стрільби; $F_1(\eta) = \eta F'(\eta)$, $G_1(\eta) = \eta G'(\eta)$.

Числові результати та їх аналіз. Результати числового експерименту наведені в табл. 1 та на рис. 1, 2. В табл. 1 подані деякі інтегральні характеристики течії, що визначаються за формулами (14): безрозмірні різниця тисків Δp , ефективна в'язкість $\eta = \Delta p / (16cw_m)$ й витрата рідини w_m в околі еритроцита, що рухається в циліндричному капілярі під дією сталої різниці тисків, коли моделлю еритроцита є тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$, а також у випадку еліпсоїдів обертання $abc = (0,9; 0,9; 1,0)$, $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ та для “ефективного” еліпсоїда обертання $abc = (0,944; 0,944; 1,0)$. “Ефективний” еліпсоїд — це осесиметричний еліпсоїд, який має такий самий переріз у площині $z = 0$, що й тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

Привертає увагу менша величина безрозмірних різниці тисків й ефективної в'язкості при русі тривісного еліпсоїда, порівняно з їх величинами при русі еліпсоїда обертання, що має той самий переріз. При тому безрозмірні витрати рідини для них відрізняються менше, ніж на 1%.

Таблиця 1. Числові значення безрозмірних різниці тисків, ефективної в'язкості й витрати рідини в околі еритроцита

Напівосі еліпса			Безрозмірна різниця тисків	Ефективна в'язкість	Витрата рідини
a	b	c			
0,9	0,99	1,00	38,4623	2,6043	0,92310
0,99	0,99	1,00	142,9727	9,0546	0,98688
0,944	0,944	1,00	46,8131	3,1430	0,93088
0,9	0,9	1,00	30,9246	2,1895	0,88276

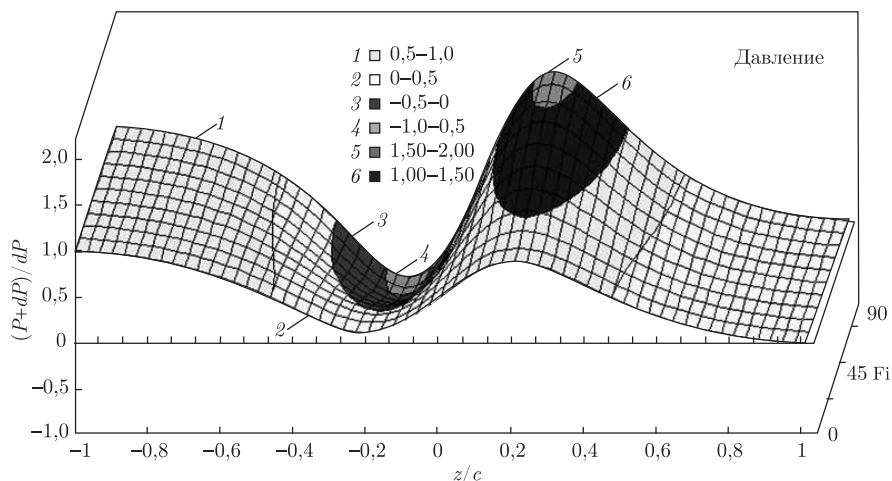


Рис. 1. Залежність приведенного тиску $(p + \Delta p)/\Delta p$ від приведені поздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ й кута φ на проміжку $[0, 90^\circ]$ для тривісного еліпсоїда

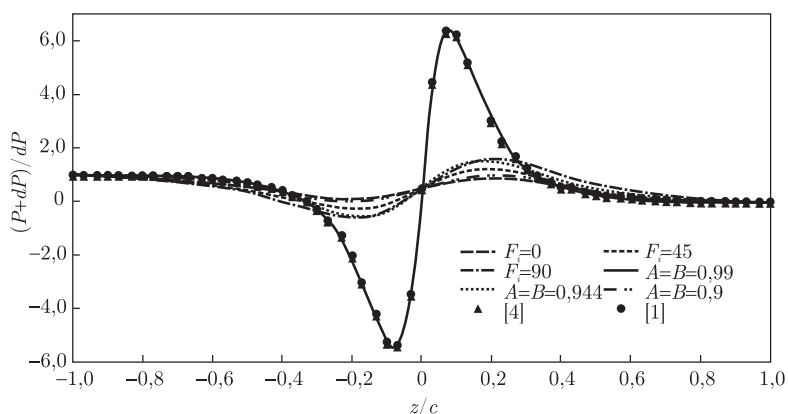


Рис. 2. Залежності приведенного тиску від поздовжньої координати для тривісного еліпсоїда при різних значеннях кута φ , а також для різних еліпсоїдів обертання. Кругочками й трикутниками позначені дані інших авторів

Тому є важливим поряд із інтегральними характеристиками течії розглянути її локальні характеристики — в першу чергу профіль тиску у мастильному шарі між еритроцитом і стінкою капіляра.

На рис. 1 наведено графік залежності приведенного тиску $(p + \Delta p)/\Delta p$ від приведені поздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ й кута φ на проміжку $[0, 90^\circ]$ для тривісного еліпсоїда $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

Рис. 2 також демонструє залежності приведенного тиску $(p + \Delta p)/\Delta p$ від приведені поздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ при фіксованих значеннях кута $\varphi [0, 45^\circ, 90^\circ]$ для того ж тривісного еліпсоїда. На рис. 2 також наведені значення тиску для еліпсоїдів обертання $abc = (0,9; 0,9; 1,0)$, $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ та $abc = (0,944; 0,944; 1,0)$. Останній еліпсоїд обертання має той же самий переріз в площині $z = 0$, що й тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

Крім того, на рис. 2 подано результати розрахунків приведенного тиску для еліпсоїда обертання $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ з статей Річарда Скейлака [4, 5] (трикутники) та з ди-

сертаційної роботи В. А. Каліона [1] (кружечки). Звертає на себе увагу повний збіг усіх результатів.

З рис. 2 випливає, що максимальні значення профілю тиску при різних кутах φ для тривісного еліпсоїда значно менші, ніж для еліпсоїда обертання, що відповідає значенню $a = 0,9$ ($\varphi = 0$) або $a = 0,99$ ($\varphi = 90^\circ$). Слід зауважити, що профіль приведенного тиску для еліпсоїда обертання при $a = 0,944$ (його площа перерізу при $z = 0$ дорівнює площі перерізу тривісного еліпсоїда) майже збігається з профілем приведенного тиску для тривісного еліпсоїда при $\varphi = 90^\circ$ ($a = 0,99$).

Таким чином, результати розрахунків за побудованою математичною моделлю руху крові у дуже вузьких капілярах в нульовому наближенні (осесиметричний еліпсоїд) повністю збігаються з результатами інших авторів [1, 4, 5]. Оцінка профілів тиску й інтегральних характеристик для тривісних й осесиметричних еліпсоїдів дозволяє стверджувати, що неосесиметрична форма тіла при русі в дуже вузьких капілярах є більш енергетично вигідна. А отже, проведене числове моделювання руху крові у дуже вузьких капілярах підтверджує можливість руху неосесиметричних еритроцитів у дуже вузьких капілярах й ставить під сумнів висновки, зроблені в роботі Дж. М. Фітц-Джеральда [3].

1. *Калион В. А.* Математические модели движения кровяных телец и их линейных агрегатов в капиллярах: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев: 1984. – 24 с.
2. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. – Москва: Мир. – 1981. – 658 с.
3. *Фитц-Джеральд Дж. М.* Механика движения эритроцитов в очень узких капиллярах // Механика. – 1971. – № 4. – С. 90–118.
4. *Tozeren H., Skalak R.* Flow of elastic compressible spheres in tubes // J. Fluid Mech. – 1979. – **95**. – № 6. – P. 743–760.
5. *Zarda P. R., Chien S., Skalak R.* Elastic deformations of red blood cells // J. Biomechanics. – 1977. – **10**. – № 2. – P. 211–221.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 19.06.2012

В. А. Калион, Е. Ю. Таран, Е. Н. Дидковская

Математическое моделирование движения трехосного эллипсоида в капилляре, заполненном вязкой жидкостью

Рассматривается использование теории смазки и метода возмущений для решения задачи о движении крови в очень узких капиллярах. Эритроцит и плазма крови моделируются трехосным эллипсоидом и ньютоновской вязкой жидкостью соответственно. Результаты сравниваются с результатами других авторов.

V. A. Kalion, E. Yu. Taran, O. M. Didkivska

Mathematical modeling of the three-axial ellipsoid motion through a capillary filled with a viscous liquid

Applications of lubrication theory and a perturbation method to the problems of blood flow in very narrow capillaries are examined. The erythrocyte and plasma of blood are modeled with the three-axial ellipsoid and with a Newtonian viscous fluid, respectively. The results are compared with results of other authors.