Доповіді
національної
академії наук
України

2 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

К. Є. Бабенко, академік НАН України **В. Л. Макаров, Р. С. Хапко, В. В. Хлобистов**

Про інтерполяцію функції двох змінних в обмеженій області за її значеннями на множині кривих, заданих параметрично

Розглянуто задачу інтерполяції функції двох змінних в обмеженій області за відомими значеннями на множині кривих, які задані параметрично. За допомогою теорії операторного інтерполювання побудовано операторний поліном, який має відповідні інтерполяційні властивості. Наведено приклади чисельних експериментів.

1. Постановка задачі. Питанню відновлення проміжних значень функції між відомими значеннями присвячено багато праць, основні інтерполяційні формули добре відомі та належним чином досліджені, особливо в одновимірному випадку. Але задача побудови ефективних алгоритмів відновлення значень невідомої функції в області за її значеннями на кривих у цій області належить до проблемних завдань. Основні труднощі при цьому викликані тим, що часто функція є відомою на певних лініях всередині області, а класичні інтерполянти, що застосовуються для наближення, задовольняють інтерполяційні умови лише на дискретному наборі вузлів.

Розв'язування задачі інтерполювання при заданні значень функції на лініях розглядалося в ряді робіт. Зокрема, в [1] запропоновано алгоритм, що використовує сингулярні інтеграли. В результаті отримано функцію, що має "кращі" порівняно з відновлюваною функцією диференціальні властивості. У роботі [2] для випадку прямих інтерполянт побудовано з використанням допоміжних функцій з компактними носіями, що задовольняють на заданих прямих інтерполяційні умови. У [3] подано розв'язок задачі без використання сингулярних інтегралів та допоміжних функцій. Цей розв'язок містить, як частинний випадок, формулу Даламбера.

Проблема побудови наближення функції двох змінних на основі відомих її значень на заданих лініях може бути вирішена також в рамках теорії R-функцій [4]. Цей спосіб було розвинено та використано при розв'язанні задачі за допомогою операторів інтерлінації [5]. Застосування цих методів у випадку довільних кривих, заданих параметрично, є проблематичним.

У даній роботі пропонується принципово інший підхід, який грунтується на теорії поліноміального операторного інтерполювання, розвиненій в [6, 7]. Сформулюємо задачу інтерполювання в абстрактній постановці. Нехай задано оператор $F\colon X \to Y$, де X — передгільбертів простір і Y — лінійний простір. Нехай $\gamma_k \in X$, $k = 1, \ldots, N$, — задані елементи (вузли), на яких відомо значення $f_k = F\gamma_k \in Y$, $k = 1, \ldots, N$. Необхідно знайти наближення $\widetilde{F}$ для оператора F, для якого виконуються інтерполяційні умови $\widetilde{F}\gamma_k = F\gamma_k$, $k = 1, \ldots, N$. Будемо шукати $\widetilde{F}$ у формі операторного полінома і поставлену задачу називатимемо *задачею поліноміального операторного інтерполювання.*

2. Наближення на основі операторної інтерполяції. Операторним поліномом степеня n називають оператор виду

$$P_n\gamma = \sum_{k=0}^{n} L_k\gamma^k,$$

де $L_k\gamma^k = L_k(\gamma, \gamma, \ldots, \gamma)$ і $L_k(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ — неперервна симетрична k-лінійна операторна форма. Нехай $\Gamma = \left\| \sum\limits_{p=0}^{n} \{(\gamma_i, \gamma_j)^p\} \right\|_{i,j=1}^{N}$, $0^0 = 1$ і Γ^+ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до Γ. В [7] встановлено вигляд інтерполяційних операторних поліномів.

Теорема 1. *Нехай виконується умова*

$$(I - \Gamma^+\Gamma)\vec{F} = \vec{0}, \tag{1}$$

де $\vec{F} = (f_1, \ldots, f_N)$ — заданий вектор. Тоді множина всіх інтерполяційних операторних поліномів для F з вузлами γ_k, $k = 1, \ldots, N$, описується формулою

$$F_n\gamma = P_n\gamma + \left\langle \vec{F} - \vec{P}_n, \Gamma^+ \left\| \sum_{p=0}^{n} (\gamma_i, \gamma)^p \right\|_{i=1}^{N} \right\rangle, \tag{2}$$

де P_n — довільний операторний поліном степеня n та $\langle \vec{F}, \vec{\beta} \rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k\beta_k$, $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^N$.

Як бачимо з теореми 1, задача інтерполяції є розв'язною для будь-яких векторів $\vec{F}$ у випадку невиродженості матриці Γ. Така ситуація названа в [7] *інваріантною розв'язністю.*

Теорема 2. *Нехай $N \leqslant n + 1$ і вузли γ_i, $i = 1, \ldots, N$, різні. Тоді операторна інтерполяційна задача в передгільбертовому просторі X інваріантно розв'язна.*

Доведення. Оскільки головний мінор другого порядку матриці $(\Gamma_0 + \Gamma_1)$, де $\Gamma_k = \|\{(\gamma_i, \gamma_j)^k\}\|_{i,j=1}^{N}$, $k = 0, 1$, не дорівнює нулю, то $\mathrm{rg}(\Gamma_0 + \Gamma_1) \geqslant 2$. Маємо

$$\mathrm{rg}(\Gamma_0 + \Gamma_1) + n - 1 \geqslant 2 + n - 1 = n + 1 \geqslant N. \tag{3}$$

Відповідно до [6] нерівність (3) є достатньою умовою інваріантної розв'язності операторної інтерполяційної задачі. Теорема доведена.

Оскільки задача поліноміального операторного інтерполювання має безліч розв'язків, виберемо як $\widetilde{F}_n$ операторний поліном з множини (2) з $P_n \equiv 0$. Тоді $\widetilde{F}_n$ — поліном мінімальної норми на множині всіх інтерполянтів степеня n [7].

Зауваження 1. З теореми 2 та формули (1) безпосередньо випливає, що коли $N \leqslant n + 1$, то матриця Γ має обернену.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді формула* (2) ($P_n \equiv 0$) *перетворюється на формулу типу Лагранжа.*

Доведення. Формулу (2) перепишемо у вигляді

$$\tilde{F}_n\gamma = \left\langle \vec{F}, \Gamma^{-1} \left\| \sum_{p=0}^{n} (\gamma_i,\gamma)^p \right\|_{i=1}^{N} \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} f_i \ell_i(\gamma), \tag{4}$$

де ℓ_i — поліноми степеня n відносно скалярних добутків $(\gamma_j,\gamma)^n$. Оскільки операторна інтерполяційна задача інваріантно розв'язна (теорема 2), то

$$\tilde{F}_n\gamma_k = \sum_{i=1}^{N} f_i \ell_i(\gamma_k) = f_k, \qquad k = 1,\ldots,N, \tag{5}$$

для будь-яких f_i. Нехай вони лінійно незалежні. Тоді з (5) маємо

$$\sum_{i\neq k} f_i \ell_i(\gamma_k) + f_k[\ell_k(\gamma_k) - 1] = 0$$

і, як наслідок лінійної незалежності f_i, отримуємо

$$\ell_i(\gamma_k) = \delta_{ik},$$

де δ_{ik} — символ Кронекера. Теорема доведена.

Очевидно, що функціонали ℓ_i можна отримати, лише зробивши відповідні перетворення в (4).

3. Частинні випадки. Інтерес у цьому сенсі становить задача відшукання значень функції в обмеженій області на площині по її слідах на деяких замкнених кривих, розміщених всередині цієї області. Така проблема цікава як самостійне питання теорії наближень і є актуальною в прикладних застосуваннях. Зокрема, вона виникає при чисельному розв'язуванні граничних задач для еліптичних рівнянь зі змінними коефіцієнтами за допомогою граничних інтегральних рівнянь [8], при зведенні крайових задач до задач з нульовими граничними умовами [9], при аналізі ліній рівня полів різної фізичної природи тощо.

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ — обмежена область і нехай γ_0 — границя області D. Позначимо через Q множину кривих, розміщених в області D і заданих параметрично (наприклад, рис. 1). Нехай $\gamma_k \in Q$, $k = 1,\ldots,N$, $N \in \mathbb{N}$ — фіксований набір кривих. Припустимо, що деяка дійснозначна достатньо гладка функція f визначена в області D і відомі її звуження (сліди) на кривих γ_k, тобто функції $f_k = f|_{\gamma_k}$, $k = 1,\ldots,N$. Нехай $\gamma \in Q$ — деяка крива і необхідно побудувати наближення $\widetilde{f}|_{\gamma}$, для якого виконуються інтерполяційні умови $\widetilde{f}|_{\gamma_k} = f_k$, $k = 1,\ldots,N$.

Узагальнимо поставлену задачу в такому сенсі. Нехай $Q \subset X$, де X — множина всіх параметричних кривих, розміщених в $\mathbb{R}^2$. Будемо розуміти під сумою двох таких кривих криву, яка утворюється шляхом додавання відповідних координат точок кривих-доданків. Очевидно, X є лінійним простором і його можна зробити передгільбертовим, ввівши для кривих з параметричним поданням $\gamma = \{x(t) = (x_1(t), x_2(t)), t \in [0,T]\}$ і $\theta = \{y(t) = (y_1(t), y_2(t)), t \in [0,T]\}$ скалярний добуток, наприклад, за таким правилом

$$(\gamma,\theta) = \frac{1}{T}\int_0^T [x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t)]\,dt. \tag{6}$$

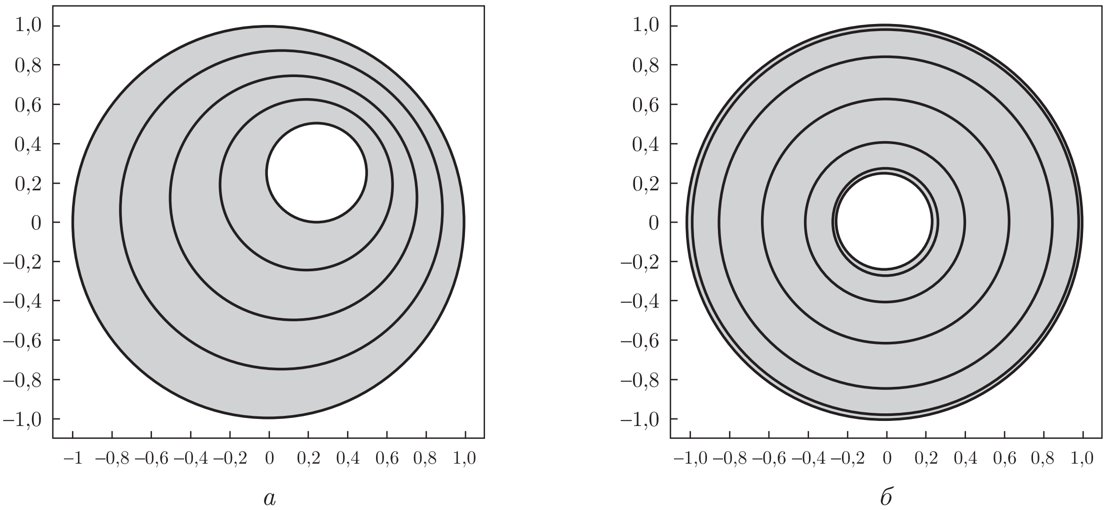

Рис. 1. Розміщення кривих-вузлів при $R = 1$ і $r = 0{,}25$. *а* — криві-вузли при $N = 5$ для множини Q_1; *б* — криві-вузли при $N = 5$ для множини Q_2

Елементи $\gamma_k \in Q$ будемо називати інтерполяційними вузлами. Позначимо Y — простір достатньо гладких функцій, визначених на кривих з X. Функція $f\colon D \to \mathbb{R}$ визначає нелінійний оператор $F\colon Q \subset X \to Y$. Задача інтерполяції може бути переформульована в такий спосіб: знайти наближення $\widetilde{F}_n$ для оператора F, для якого $\widetilde{F}_n \gamma_k = F\gamma_k$, $k = 1, \ldots, N$. Таким чином, проблема побудови інтерполяційного наближення функції f може бути вирішена за допомогою операторної інтерполяції, тобто наближення будується у вигляді (2) зі скалярним добутком (6).

Будемо розглядати випадок параметрично заданих замкнених кривих, тобто в (6) $T = 2\pi$.

П р и к л а д 1. Нехай двозв'язна область D_1 обмежена колом радіуса R з центром у початку координат і колом радіуса $r < R$ з центром у точці (r, r). Однопараметричне сімейство кривих Q_1 утворюють кола

$$\gamma^{(1)}(\alpha) = \{x(t, \alpha) = (\alpha r + \varphi(\alpha)\cos t, \alpha r + \varphi(\alpha)\sin t),\ t \in [0, 2\pi]\},$$

де $\varphi(\alpha) = \alpha r + (1 - \alpha)R$, $\alpha \in [0, 1]$. Розглянемо також двозв'язну область D_2, утворену двома концентричними колами з радіусами R і r, $R > r$, і центрами у початку координат. Відповідне однопараметричне сімейство кривих Q_2 утворюють концентричні кола

$$\gamma^{(2)}(\alpha) = \{x(t, \alpha) = \varphi(\alpha)(\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Виберемо в кожній з множин інтерполяційні криві-вузли (див. рис. 1)

$$\gamma_{k,1} = \gamma^{(1)}\left(\frac{k-1}{N-1}\right) \qquad \text{і} \qquad \gamma_{k,2} = \gamma^{(2)}\left(\frac{3}{8}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2N} + \frac{5}{8}\right), \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Нехай необхідно інтерполювати функції $u_1(x) = \sin(x_1^2 + x_2)$ та $u_2(x) = \exp(x_1 + x_2^2)$, $x \in D$. Як інтерполянт на кривій γ з відповідної множини виберемо згідно з (2) функцію $\widetilde{u} = \widetilde{F}_n\gamma$. У табл. 1 наведено значення похибок

$$e_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_r}\sum_{j=0}^{N_t-1}(u(x(t_j, c_i)) - \widetilde{u}(x(t_j, c_i)))^2}$$

і

$$e_\infty = \max_{i=1,\ldots,N_r,\, j=0,\ldots,N_t-1} |u(x(t_j,c_i)) - \widetilde{u}(x(t_j,c_i))|$$

для різної кількості вузлів інтерполяції N.

Обчислення здійснено в середовищі Matlab при $t_j = 2\pi j/N_t$, $c_i = (i-1)/(N_r-1)$, $i = 1,\ldots,N_r$, з $R = 1$ і $r = 0{,}25$ та значеннями параметрів $N_r = N_t = 64$, $N = n+1$. Відзначимо, що похибки наближення за допомогою поліноміального операторного інтерполювання при порівняно невеликій кількості вузлів є доволі малими.

Наведемо вигляд інтерполянта для часткового випадку $N = 2$ для множини кривих Q_2

$$\widetilde{F}_1\gamma^{(2)} = f_1\frac{\varphi(\alpha)-r}{R-r} + f_2\frac{R-\varphi(\alpha)}{R-r}.$$

Зауваження 2. При $N = n+1$ у випадку однопараметричного сімейства кривих, залежних від параметра α, де α входить лінійно в рівняння кривих, функції $\ell_i(\alpha)$ в (4) можна побудувати окремо як звичайні фундаментальні поліноми Лагранжа n-го степеня.

Приклад 2. Нехай область D обмежена кривою $\gamma_0 = \{x_0(t) = (0{,}2\cos t, 0{,}4\sin t + 0{,}3\sin^2 t), t \in [0,2\pi]\}$. Виберемо однопараметричне сімейство кривих в області D у вигляді

$$\gamma(\alpha) = \{x(t,\alpha) = \alpha x_0(t),\ t\in[0,2\pi]\}, \qquad \alpha\in(0,1],$$

і визначимо інтерполяційні криві-вузли

$$\gamma_k = \gamma\left(0{,}5\left(\cos\frac{\pi(2k-1)}{2N}+1\right)\right), \qquad k = 1,\ldots,N.$$

Розглядається наближення функцій u_1 і u_2, аналогічних наведеним у попередньому прикладі. В табл. 2 наведено результати чисельних експериментів при різній кількості вузлів N.

Зауважимо, що отримані результати можуть бути узагальнені на випадок задач інтерполяції за відомими слідами на параметрично заданих поверхнях в $\mathbb{R}^3$ або гіперповерхнях в $\mathbb{R}^d$, $d > 3$.

Таблиця 1. Похибки при різних значеннях N для прикладу 1

N	Інтерполяція на множині Q_1				Інтерполяція на множині Q_2			
	Функція u_1		Функція u_2		Функція u_1		Функція u_2	
	e_2	e_∞	e_2	e_∞	e_2	e_∞	e_2	e_∞
3	0,497673	0,036489	1,582603	0,115820	0,782693	0,091018	2,365314	0,275488
5	0,011288	0,001084	0,040102	0,004513	0,033600	0,005426	0,167213	0,025642
7	0,000310	0,000047	0,000985	0,000150	0,002963	0,000555	0,009050	0,001656
9	0,000004	0,000001	0,000022	0,000004	0,000046	0,000010	0,000391	0,000082
11	0,0	0,0	0,0	0,0	0,000004	0,000001	0,000015	0,000003

Таблиця 2. Похибки при різних значеннях N для прикладу 2

N	Функція u_1		Функція u_2	
	e_2	e_∞	e_2	e_∞
3	0,026327	0,001695	0,154409	0,014053
5	0,000035	0,000003	0,050000	0,008143
7	0,0	0,0	0,000024	0,000002
9	0,0	0,0	0,000001	0,0

1. *Стейн Н.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – Москва: Мир, 1973. – 342 с.
2. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1957. – 255 с.
3. *Литвин О. М., Рвачов В. Л.* Класична формула Тейлора і її узагальнення та застосування. – Київ: Наук. думка, 1973. – 122 с.
4. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 193 с.
5. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 407 с.
8. *Бабенко К., Хапко Р.* Про чисельне розв'язування однієї прямої задачі EIT методом граничних інтегральних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2012. – Вип. 18. – С. 22–30.
9. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – Москва: Наука, 1973. – 408 с.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
Інститут математики НАН України, Київ
Львівський національний університет
ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 19.07.2012

К. Е. Бабенко, академик НАН Украины **В. Л. Макаров, Р. С. Хапко,**
В. В. Хлобыстов

Об интерполяции функции двух переменных в ограниченной области по ее значениям на множестве кривых, заданных параметрически

Рассмотрена задача интерполяции функции двух переменных в ограниченной области по известным значениям на множестве кривых, которые заданы параметрически. С помощью теории операторного интерполирования построен операторный полином, владеющий соответствующими интерполяционными свойствами. Приведены примеры численных экспериментов.

C. Y. Babenko, Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov, R. S. Chapko,**
V. V. Khlobystov

On the interpolation of a function of two variables in a bounded domain from its values on a set of parametric curves

We consider the interpolation problem for a function of two variables in a bounded domain from the given values on a set of curves with parametric representation. On the basis of the theory of operator interpolation, the operator polynomial, which has corresponding interpolation properties, is constructed. The examples of numerical experiments are presented.