УДК 517.9;519.86

С. В. Кучук-Яценко

Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах із заданими доходами

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

В моделі економіки обміну знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Наведено необхідні та достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

На практиці важливою задачею є відшукання умов відсутності часового та просторового арбітражу у вигляді сукупності обмежень на такі макроекономічні параметри, як ціна грошей і ціни товарів. Існуючі моделі встановлюють умови неарбітражності в термінах мартингальних мір (див. [1–5]). Проте на практиці математичні моделі, що описують еволюцію цін активів, невідомі. Тому побудова моделей загального вигляду і відшукання умов, за яких арбітражні можливості відсутні, є актуальною проблемою.

У даній роботі описується побудова неарбітражної економічної динаміки для випадку, коли стратегія поведінки споживача не залежить від цінового вектора. Така модель є надто важливою тому, що задача відшукання рівноважного цінового вектора у кожному періоді функціонування економічної системи зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь (див. [6, 7]).

Попередні результати. Досліджуємо економічну модель обміну з пропорційним споживанням і заданими доходами. У кожний період функціонування економіки споживача описуємо деяким вектором попиту, що заданий на деякому ймовірнісному просторі. З іншого боку, кожен споживач має деякий набір товарів, який він бажає обміняти на інший набір, що визначається його вектором попиту. Крім того, кожен споживач має заданий додатний дохід.

Розглядатимемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{l} C_{ki}\frac{\langle b_i, p\rangle + D_i}{\langle C_i, p\rangle} = \psi_k, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{1}$$

розв'язки якої описують стан рівноваги в таких економічних системах, де $C = |C_{ki}|_{k=1,i=1}^{n,l}$, $B = |b_{ki}|_{k=1,i=1}^{n,l}$ є невід'ємними матрицями, $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^{n}$ і $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^{n}$, $i = \overline{1, l}$, — невід'ємні вектори, побудовані за цими матрицями відповідно, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{n}$ — строго додатний вектор, $D_i > 0$, $i = \overline{1, l}$. Припускатимемо також, що мають місце нерівності

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ki} > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_{ki} > 0, \qquad i = \overline{1, l}, \qquad \sum_{i=1}^{l} C_{ki} > 0, \qquad k = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Нижче наведено формулювання теореми 5.2.8 з [6, 7], яка встановлює необхідні та достатні умови існування строго додатного розв'язку системи рівнянь (1).

Теорема 1. *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$ *— строго додатний вектор, а* i*-й споживач має невід'ємний вектор запасу товарів* $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$ *та кошти* $D_i > 0$, $i = \overline{1,l}$. *Необхідними та достатніми умовами існування строго додатного розв'язку системи рівнянь* (1) *стосовно вектора* $p \in R_+^n$ *є умови:*

1) вектор $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$ *належить внутрішності невід'ємного конуса, утвореного векторами* $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1,l}$, *тобто*

$$\psi = \sum_{i=1}^{l} y_i C_i, \qquad y_i > 0, \qquad i = \overline{1,l}; \tag{3}$$

2) вектор $D = \{D_i\}_{i=1}^l$ *належить внутрішності невід'ємного конуса, утвореного векторами* $d_k = \{-b_{ki} + y_i C_{ki}\}_{i=1}^l$, $k = \overline{1,n}$.

Надалі вважатимемо, що достатні умови теореми 1 виконуються. Оцінку знизу для компонент цінового вектора отримаємо, застосувавши теореми 6.1.1, 6.1.2 з [6, 7].

Перед тим як сформулювати основний результат цієї частини, наведемо коротке доведення необхідності умов теореми 1. Нехай існує строго додатний вектор p_0, який є розв'язком системи рівнянь (1). Введемо позначення

$$y_i = \frac{\langle b_i, p\rangle + D_i}{\langle C_i, p\rangle}, \qquad i = \overline{1,l}. \tag{4}$$

Внаслідок виконання нерівностей (2) і строгої додатності компонент вектора D маємо $y_i > 0$, $i = \overline{1,l}$, та справедлива рівність (3). З рівностей (4) отримуємо систему рівностей

$$\langle -b_i + y_i C_i, p_0\rangle = D_i, \qquad i = \overline{1,l}, \tag{5}$$

з якої і випливає умова *2* теореми 1 через строгу додатність вектора p_0.

Припускаємо, що виконуються умови (2).

Теорема 2. *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$ *— строго додатний вектор, а* i*-й споживач має невід'ємний вектор запасу товарів* $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$ *та кошти* $D_i > 0$, $i = \overline{1,l}$, *і виконуються такі умови:*

1) вектор $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$ *належить внутрішності* r*-вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами* $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1,l}$, *тобто*

$$\psi = \sum_{i=1}^{l} y_i C_i, \qquad y_i > 0, \qquad i = \overline{1,l};$$

2) вектор $D = \{D_i\}_{i=1}^l$ *належить внутрішності* r_1*-вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами* $d_k = \{-b_{ki} + y_i C_{ki}\}_{i=1}^l$, $k = \overline{1,n}$;

3) існує підсистема r *лінійно незалежних векторів множини векторів* $\{C_i,\ i = \overline{1,l}\}$ *таких, що вектор* ψ *належить внутрішності конуса, утвореного цією підсистемою векторів;*

4) існує підсистема r_1 *лінійно незалежних векторів множини векторів* $\{d_k = -b_k + y C_k,\ k = \overline{1,n}\}$ *таких, що вектор* $D = \{D_i\}$, $i = \overline{1,l}$, *належить внутрішності конуса, утвореного цією підсистемою векторів.*

Тоді існує такий набір векторів f_k^1, $k=\overline{1,l}$, що справедливі такі твердження:

1) існує $n-r_1+1$ лінійно незалежних невід'ємних розв'язків системи рівнянь (5) z_k^1 таких, що множину строго додатних розв'язків системи рівнянь (5) задає формула

$$p=\sum_{m=r_1}^{n}\gamma_m^1 z_m^1,$$

де

$$z_m^1=\{\langle D,f_1^1\rangle-\langle d_m,f_1^1\rangle p_m^*,\ldots,\langle D,f_{r_1}^1\rangle-\langle d_m,f_{r_1}^1\rangle p_m^*,0,\ldots,p_m^*,0,\ldots,0\},\quad m=\overline{r_1+1,n},$$

$$z_{r_1}=\{\langle D,f_1^1\rangle,\ldots,\langle D,f_{r_1}^1\rangle,0,\ldots,0\},$$

$$p_m^*=\begin{cases}\min\limits_{s\in K_m}\dfrac{\langle D,f_s^1\rangle}{\langle d_m,f_s^1\rangle}, & K_m=\{s,\langle d_m,f_s^1\rangle>0\},\\ 1,\quad \langle d_m,f_s^1\rangle\leqslant 0, & \forall s=\overline{1,r_1},\end{cases}$$

а компоненти вектора $\{\gamma_m^1\}_{m=r_1}^n$ задовольняють умови

$$\sum_{m=r_1}^{n}\gamma_m^1=1,\qquad \gamma_m^1>0,\qquad m=\overline{r_1,n},$$

$$\sum_{m=r_1+1}^{n}\langle d_m,f_i^1\rangle p_m^*\gamma_m^1<\langle D,f_i^1\rangle,\qquad i=\overline{1,r_1};$$

2) існує строго додатний вектор p, який є розв'язком системи рівнянь 1 і для компонент якого виконуються нерівності

$$\begin{cases}p_i\geqslant\gamma_{r_1}^1\langle D,f_i^1\rangle, & i=\overline{1,r_1},\\ p_i\geqslant\gamma_i^1 p_i^*, & i=\overline{r_1+1,n}.\end{cases}\tag{6}$$

Постановка задачі. Припустимо, що економічна система функціонує протягом N періодів, $N<\infty$. У t-му періоді функціонування економіки вектори попиту $C_i^t(\omega)=$ $=\{C_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n$, $i=\overline{1,l}$, задаються на імовірнісному просторі $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$. Також припустимо, що рівні споживання у t-му періоді задано деяким випадковим вектором

$$y^t(\omega)=\{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l,$$

всі компоненти якого є строго додатними, тобто $y_i^t(\omega)>0$. Цей вектор називатимемо вектором ступенів задоволення потреб споживача (див. [6, 7]). Таким чином, вектор пропозиції в t-му періоді задається формулою

$$\psi^t(\omega)=\sum_{i=1}^{l}C_i^t(\omega)y_i^t(\omega).$$

Нижче наведено теорему, що встановлює достатні умови існування економічної динаміки і яка є наслідком попередніх результатів.

Теорема 3. *Нехай множина векторів* $C_i^t(\omega)$, $i=\overline{1,l}$, *які є стовпчиками матриці* $C^t(\omega)=\|C_{ki}^t(\omega)\|_{k=1,i=1}^{n,l}$, *задовольняє нерівності*

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ki}^t(\omega)>0, \qquad i=\overline{1,l}, \qquad \sum_{i=1}^{ll} C_{ki}^t(\omega)>0, \qquad k=\overline{1,n}, \qquad t=\overline{1,N},$$
$$C_{ks}^t(\omega)\geqslant 0, \qquad k=\overline{1,n}, \qquad s=\overline{1,l}, \qquad t=\overline{1,N}. \tag{7}$$

Нехай $\psi^t=\{\psi_k^t(\omega)\}_{k=1}^n$, $t=\overline{1,N}$, *— строго додатний вектор, а* i*-й споживач має невід'ємний вектор запасу товарів* $b_i^t=\{b_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n$ *та кошти* $D_i^t(\omega)>0$, $i=\overline{1,l}$, $t==\overline{1,N}$. *Необхідними та достатніми умовами існування з імовірністю 1 строго додатного розв'язку системи рівнянь*

$$\sum_{i=1}^{l} C_{ki}^t(\omega)\frac{\langle b_i^t,p^t\rangle+D_i^t}{\langle C_i^t(\omega),p\rangle}=\psi_k^t(\omega), \qquad k=\overline{1,n}, \qquad t=\overline{1,N}, \tag{8}$$

стосовно цінового вектора $p^t\in R_+^n$ *є умови:*

1) вектор $\psi^t=\{\psi_k^t(\omega)\}_{k=1}^n$ *належить внутрішності* r*-вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами* $C_i^t=\{C_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n$, $i=\overline{1,l}$, *тобто*

$$\psi^t=\sum_{i=1}^{l} y_i^t(\omega)C_i^t(\omega), \qquad y_i^t>0, \qquad i=\overline{1,l}, \qquad t=\overline{1,N}; \tag{9}$$

2) вектор $D^t=\{D_i^t\}_{i=1}^l$ *належить внутрішності* r_1*-вимірного невід'ємного конуса, утвореного векторами* $d_k^t=\{-b_{ki}^t+y_i^t(\omega)C_{ki}^t(\omega)\}_{i=1}^l$, $k=\overline{1,n}$, $t=\overline{1,N}$.

Припустимо, що в t-му періоді функціонування економічної системи k-та компонента $\overline{p}_k^t$ випадкового рівноважного цінового вектора $\overline{p}^t$ визначає ціну k-го товару, $k=\overline{1,n_t}$. Вважатимемо, що перша компонента $\overline{p}_1^t$ цього вектора визначає рівноважну ціну грошей, а $\psi_1^t(\overline{p}^t)$ визначає пропозицію грошей в t-му періоді функціонування економічної системи. Припустимо також, що короткий продаж товарів можливий тільки в межах кожного періоду функціонування економічної системи.

На імовірнісному просторі $\{\Omega,\mathcal{F},\overline{P}\}$, де еволюція цін на товари задається теоремою 3, визначимо еволюцію цін підмножини $n_0\leqslant n_t$, $N_0\leqslant t\leqslant N_1$, товарів за правилом

$$S_t=\{\overline{p}_{i_1}^t,\ldots,\overline{p}_{i_{n_0}}^t\}, \qquad N_0\leqslant t\leqslant N_1, \qquad i_k<i_{k+1}, \qquad k=\overline{1,n_0-1}. \tag{10}$$

Введемо еволюцію неризикового активу правилом

$$B_t=\prod_{i=N_0}^{t}(1+p_1^i), \qquad t=\overline{N_0,N_1}, \tag{11}$$

де p_1^t — рівноважна ціна грошей в t-му періоді функціонування економічної системи.

Означення 1. Економічну динаміку, означену в теоремі 3, називатимемо неарбітражною, якщо для будь-якої підмножини множини товарів, визначеної індексами $i_1,\ldots,i_{n_0}$ і довільними числами $1\leqslant N_0<N_1\leqslant N$, для еволюції цін активів, заданої законом (10), та

еволюції неризикового активу, заданої законом (11), множина самофінансованих арбітражних стратегій без коротких продажів між періодами функціонування економічної системи є порожньою.

Сформулюємо тепер загальні умови відсутності арбітражу в динамічних системах без коротких продажів.

Теорема 4. *Нехай на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ з фільтрацією $\mathcal{F}_n$, $n = \overline{1, N}$, задано випадкову еволюцію неризикового активу законом B_n, $n = \overline{1, N}$, так, що виконуються умови: існує невипадкова константа $D < \infty$ така, що $1 \leqslant B_n \leqslant D$, $n = \overline{1, N}$, $\omega \in \Omega$, і нехай еволюція цін $n_0 \geqslant 1$ ризикових активів задається правилом $S_n = \{S_n^i\}_{i=1}^{n_0}$, $n = \overline{1, N}$. Якщо*

$$\left\{\frac{S_n}{B_n}, \mathcal{F}_n\right\}, \qquad n = \overline{1, N},$$

є супермартингалом, то множина самофінансованих арбітражних стратегій без коротких продажів порожня.

Як і раніше, припускаємо, що перша компонента цінового вектора $p^t = \{p_i^t\}_{i=1}^{n_t}$ визначає вартість грошей в t-му періоді функціонування економічної системи.

Теорема 5. *Економічна динаміка, означена в теоремі 3, є неарбітражною, якщо за імовірністю 1 виконуються нерівності*

$$\overline{p}_k^{t+1} \leqslant \overline{p}_k^t(1 + f^{t+1}(\overline{p}_1^{t+1})), \qquad k = \overline{2, n_t}, \qquad t = \overline{1, N},$$

де $\overline{p}^t = \{\overline{p}_k^t\}_{k=1}^{n_t}$ — рівноважний ціновий вектор в t-му періоді функціонування економічної системи, $f^t(x)$, $t = \overline{1, N}$, — множина невід'ємних функцій, що задовольняють умову $0 \leqslant f^t(x) \leqslant x$, $t = \overline{1, N}$.

Позначимо

$$r_0^t = r_0^t(\omega) = \min_i \psi_i^t(\omega), \qquad R_0^t = R_0^t(\omega) = \max_i \psi_i^t(\omega), \qquad A^t = A^t(\omega) = \sum_{i=1}^n p_i^t(\omega)\psi_i^t(\omega),$$

$$l_0^t = l_0^t(\omega) = \min_{i=\overline{1, r_1^t}} \{\gamma_{r_1^t}^{1,t}\langle D^t, f_i^{1,t}(\omega)\rangle\}, \qquad l_1^t = l_1^t(\omega) = \min_{i=\overline{r_1^t+1, n}} \{\gamma_i^{1,t} p_i^{*,t}\},$$

де $f_i^{1,t}$ і $\gamma_i^{1,t}$ визначені теоремою 2 у періоді t. Вважається, що умови теореми 2 виконуються в кожному періоді $t = \overline{1, N}$. Виконуються нерівності

$$p_i^t(\omega) \leqslant \frac{A^t(\omega)}{r_0^t(\omega)}, \qquad p_i^t(\omega) \geqslant \min_{j=1,2}\{l_j^t(\omega)\}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 6. *Нехай множина векторів $C_i^t(\omega)$, $i = \overline{1, l}$, що є стовпчиками матриці $C^t(\omega) = ||C_{ki}^t(\omega)||_{k=1,i=1}^{n,l}$, задовольняє нерівності (7) і нехай вектори*

$$y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l, \qquad b_i(\omega) = \{b_{ki}(\omega)\}_{k=1}^n, \qquad D_i(\omega) > 0, \qquad i = \overline{1, l},$$

є строго додатними для всіх $\omega \in \Omega$. Нехай у кожному періоді t виконуються умови теореми 2 з імовірністю 1. Економічна динаміка, означена в теоремі 3, неарбітражна, якщо нерівності

$$\frac{A^{t+1}}{r_0^{t+1}} \leqslant \min_{j=1,2}\{l_j^t(\omega)\}\Big(1 + \delta \min_{j=1,2}\{l_j^{t+1}(\omega)\}\Big), \qquad t = \overline{1, N}, \tag{12}$$

виконуються з імовірністю 1 для деякого $0 < \delta < 1$.

Доведення. Якщо виконуються нерівності (12), то нерівності

$$p_i^{t+1} \leqslant p_i^t(1 + \delta p_1^{t+1}), \qquad i = \overline{2, n}, \tag{13}$$

виконуються з імовірністю 1 згідно з теоремою 2. Застосовуючи теорему 5, з $f^t(x) = \delta x$, $0 < \delta < 1$, отримуємо доведення теореми.

1. *Harrison J. M., Kreps D. M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // J. Econ. Theory. – 1979. – **20**. – P. 381–408.
2. *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochast. Process. and Appl. – 1981. – **2**, No 3. – P. 215–260.
3. *Dalang R. S., Morton A., Willinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities models // Stochast. and Stochast. Rep. – 1990. – **29**, No 2. – P. 185–201.
4. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики: В 2 т. – Москва: Фазис, 1998. – Т. 2. – 544 с.
5. *Gonchar N. S.* Mathematical model of stock market // Cond. Matt. Phys. – 2000. – **3**, No 3(23). – P. 461–496.
6. *Гончар М. С.* Математичні основи інформаційної економіки. – Київ: Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова, 2007. – 464 с.
7. *Gonchar N. S.* Mathematical foundations of information economics. – Kyiv: Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 2008. – 468 p.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 17.05.2012

С. В. Кучук-Яценко

Отсутствие арбитража в динамических экономических системах с заданными доходами

В модели экономики обмена найдены необходимые и достаточные условия строгой положительности решений уравнений экономического равновесия. Получены неравенства снизу для всех равновесных ценовых векторов. Сформулирована теорема существования экономической динамики. Даны необходимые и достаточные условия отсутствия арбитражных возможностей для экономических агентов.

S. V. Kuchuk-Iatsenko

Arbitrage absence in economic dynamical systems with fixed gains

The necessary and sufficient conditions of the strict positiveness of equilibrium price vectors are found for the exchange economy model. For all solutions of the set of equations of equilibrium, the inequalities from below are established. The theorem of existence for the economy dynamics is stated. The sufficient conditions of the absence of space and time arbitrage opportunities for economic agents are presented.