Доповіді
Національної
Академії наук
України

2 • 2013

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

О. М. Литвин, Ю. І. Першина

Наближення розривних функцій розривними сплайнами на прямокутнику з однією криволінійною стороною

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Наводиться метод побудови розривних інтерполяційних та апроксимаційних сплайнів для наближення розривних функцій, область визначення яких розбивається на криволінійні трапеції. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни.

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами від однієї та декількох змінних досить повно описана в багатьох роботах вітчизняних та зарубіжних дослідників (див., наприклад, [1]). На практиці використання кусково-аналітичних наближень, заданих різними формулами (поліномами відповідного степеня) в точках кожного елемента розбиття області наближення, інколи дає змогу знайти велику кількість невідомих параметрів. Це привело до появи неконформних елементів в методі скінченних елементів [2]. Аналогічна задача досліджувалася в роботах Б. А. Попова [3] та інших авторів, де розглядалися наближення неперервних та неперервно-диференційовних функцій за допомогою розривних сплайнів у чебишовській нормі (рівномірне наближення). В роботі [4] була розглянута апроксимація розривних розв'язків (функцій однієї змінної) диференціальних рівнянь за допомогою розривного методу Гальоркіна, а в [5] — розривний метод Гальоркіна для еліптичної крайової задачі з використанням двовимірних неузгоджених сіток. Цей метод дозволяє враховувати неконформність елементів, причому він забезпечує неперервність розв'язку, хоча від базисних функцій узгодженості не вимагає.

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів або наближення розривних функцій неперервними. Але загальної теорії таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких, як частинний випадок, включає множину неперервних сплайнів, що можуть мати розриви першого роду в заданих точках або на заданій множині ліній — границь елементів.

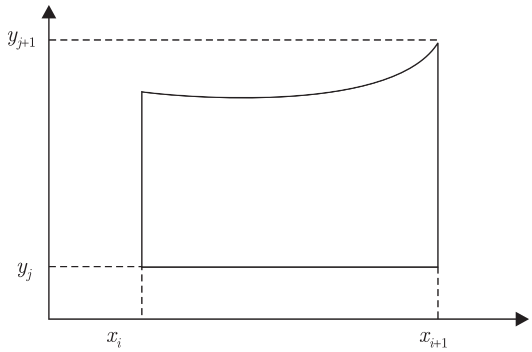


Рис. 1. Зображення одного з можливих криволінійних трапецевидних елементів з прямими кутами у вузлах (x_i, y_j)

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час не достатньо вивчене питання щодо використання інформації про внутрішню структуру тіла людини (різні органи мають свою форму та щільність тканин). Отже, актуальними є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

У роботі [6] запропоновано метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в [7] — інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [8].

Нижче вперше будуються та досліджуються інтерполяційні та апроксимаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на криволінійні трапеції (прямокутники з однією криволінійною стороною).

Постановка задачі. Нехай задано розривну функцію двох змінних $f(x, y)$ в області $D = [0, 1]^2$. Вважатимемо, що область D розбита на криволінійні трапеції. Ці елементи не вкладаються один в одний, і їх сторони не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими елементами. Метою роботи є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції та апроксимації, які в кожному елементі розбиття є операторами поліноміальної інтерполяції або апроксимації функції $f(x, y)$.

Побудова розривного сплайн-інтерполянта. Нехай задано криволінійну трапецію (рис. 1)

$$\mathrm{TP}_{ij} = \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}(x)\}, \qquad g_{j+1}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданої трапеції функція $f(x, y)$ може мати розриви першого роду, причому у вузлах заданого елементу функція набуває таких значень:

$$C_{ij}^1 = f(x_i + 0, y_j + 0), \qquad C_{ij}^2 = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$
$$C_{ij}^3 = f(x_i + 0, g_{j+1}(x_i) - 0), \qquad C_{ij}^4 = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}(x_{i+1}) - 0).$$

Визначення. Будемо називати розривним інтерполяційним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{TP}_{ij} \subset D$ таку функцію:

$$S(x,y) = s_{ij}(x,y) = C_{ij}^1 \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}(x)}{y_j - g_{j+1}(x)} + C_{ij}^2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}(x)}{y_j - g_{j+1}(x)} + \\ + C_{ij}^3 \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j(x)}{g_{j+1}(x) - y_j} + C_{ij}^4 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j(x)}{g_{j+1}(x) - y_j}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Якщо $f(x,y)$ має розриви першого роду у деяких точках (x_i, y_j) та $f(x,y) \in \in C^{(r,r)}(\mathrm{TP}_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $r = 1,2$, то залишок наближення функції $f(x,y)$ сплайном вигляду* (1) *на кожній криволінійній трапеції матиме вигляд*

$$RS(x,y) = R_1R_2f(x,y) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) + \\ + \frac{y - g_{j+1}(x)}{y_j - g_{j+1}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}(x) - y_j} R_2 f(x, g_{j+1}(x)),$$

$$R_1 f(x,y) = \int\limits_{y_j}^{g_{j+1}(x)} f^{(0,r)}(x,\eta) G1(x,y,\eta)\, d\eta, \qquad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$R_2 f(x,y) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi, y) G2(x,\xi)\, d\xi, \qquad y \in [y_j, g_{j+1}(x)],$$

$$G1(x,y,\eta) = \begin{cases} \dfrac{y - g_{j+1}(x)}{y_j - g_{j+1}(x)} \dfrac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leqslant \eta \leqslant y \leqslant g_{j+1}(x), \\ -\dfrac{y - y_j}{g_{j+1}(x) - y_j} \dfrac{(g_{j+1}(x) - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leqslant y \leqslant \eta \leqslant g_{j+1}(x), \end{cases}$$

$$G2(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dfrac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leqslant \xi \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \\ -\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \dfrac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leqslant x \leqslant \xi \leqslant x_{i+1}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Оцінка похибки наближення функції $f(x,y)$ побудованим розривним інтерполяційним сплайном $S(x,y) = s_{ij}(x,y)$ на кожній криволінійній трапеції має вигляд*

$$|f(x,y) - S(x,y)| \leqslant Q,$$

$$Q = \| f^{(2,2)}(x,y) \|_{L_\infty [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, g_{j+1}(x)]} \frac{(\Delta_x)^2}{64} \max\{(\Delta 1_y)^2, (\Delta 2_y)^2\} + \\ + \max\left\{ \|f^{(0,2)}(x_i, y)\|_{L_\infty [y_j, g_{j+1}(x)]} \frac{(\Delta 1_y)^2}{8}, \|f^{(0,2)}(x_{i+1}, y)\|_{L_\infty [y_j, g_{j+1}(x)]} \frac{(\Delta 2_y)^2}{8} \right\} + \\ + \max\left\{ \|f^{(2,0)}(x, y_j)\|_{L_\infty [x_i, x_{i+1}]} \frac{(\Delta_x)^2}{8}, \|f^{(2,0)}(x, g_{j+1}(x))\|_{L_\infty [x_i, x_{i+1}]} \frac{(\Delta_x)^2}{8} \right\}.$$

$$\Delta_x = x_{i+1} - x_i, \qquad \Delta 1_y = g_{j+1}(x_i) - y_j, \qquad \Delta 2_y = g_{j+1}(x_{i+1}) - y_j.$$

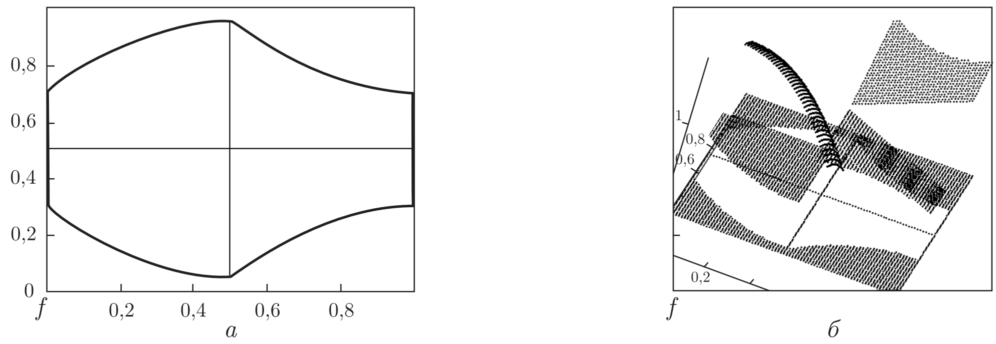


Рис. 2. Графічне зображення: *а* — області визначення функції $f(x, y)$; *б* — функції $f(x, y)$

Побудова розривного сплайн-апроксиманта.

Визначення. Будемо називати розривним апроксимаційним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{TP}_{ij} \subset D$ функцію (1), в якій коефіцієнти C_{ij}^k, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, 4}$, сплайна $S(x, y)$ знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\iint\limits_{\mathrm{TP}_{ij}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dxdy \to \min_C . \qquad (2)$$

Теорема 3. *Для оператора наближення розривної функції* $f(x, y) \in C^{(2,2)}(\mathrm{TP}_{ij})$ *розривним апроксимаційним сплайном* $S(x, y)$ *вигляду* (1)*, побудованим за допомогою методу найменших квадратів, на кожному елементі розбиття* TP_{ij}*,* $i = \overline{1, n}$*,* $j = \overline{1, m}$*, справедлива така оцінка:*

$$\|S(x, y)\|_\infty \leqslant \max\{|f(x_i, y_j|, |f(x_{i+1}, y_j)|, |f(x_i, g_{j+1}(x_i))|, |f(x_{i+1}, g_{j+1}(x_{i+1}))|\} + Q,$$

де Q *визначається в теоремі 2.*

П р и к л а д. Нехай функція задана на одиничному квадраті $[0, 1] \times [0, 1]$

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0{,}5 < x < 1, \quad 0{,}5 < y < (x - 1)^2 + 0{,}7; \\ 1{,}5 - 4x^2 - y^2, & 0 < x < 0{,}5, \quad 0{,}5 < y < -(x - 0{,}5)^2 + 0{,}95; \\ 0{,}5, & 0 < x < 0{,}5, \quad (x - 0{,}5)^2 + 0{,}05 < y < 0{,}5; \\ 1 - x + y^2, & 0{,}5 < x < 0, \quad -(x - 1)^2 + 0{,}3 < y < 0{,}5. \end{cases}$$

Тобто на лініях фігури, зображеної на рис. 2, *а*, функція $f(x, y)$ має розриви першого роду. Нехай задано лінії:

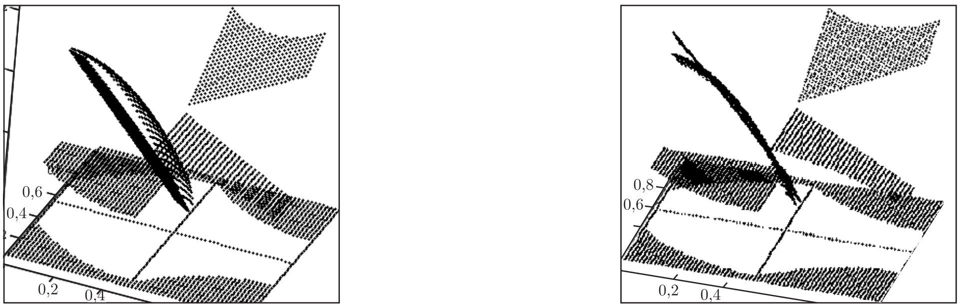
$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0{,}5, \qquad x_3 = 1,$$

$$y_1 = 0, \qquad y_2^1 = (x - 0{,}5)^2 + 0{,}05, \qquad y_2^2 = -(x - 1)^2 + 0{,}3,$$

$$y_3 = 0{,}5, \qquad y_3^1 = (x - 1)^2 + 0{,}7, \qquad y_3^2 = -(x - 0{,}5)^2 + 0{,}95.$$

Вони розбивають область визначення функції $f(x, y)$ на вісім трапецевидних елементів з однією криволінійною стороною в кожному елементів.

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн вигляду (1) (його графік наведено на рис. 3, *а*). Визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого сплайну $S(x, y)$: $\max|f(x, y) - S(x, y)| \approx 0{,}3$.



а *б*

Рис. 3. Графічний вигляд розривного інтерполяційного (*а*) і апроксимаційного (*б*) сплайнів (темне забарвлення) та заданої функції (світле забарвлення)

Тепер побудуємо розривний апроксимаційний сплайн за формулами (1), коефіцієнти якого знаходяться з умови (2). Графічне зображення цього сплайну подано на рис. 3, *б*. Визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого сплайну $S(x,y)$: $\max|f(x,y)-S(x,y)| \approx 0{,}08$.

Як бачимо, побудований розривний апроксимаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний. Побудовані розривні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

Таким чином, в роботі пропонується метод побудови розривного інтерполяційного та апроксимаційного лінійного сплайнів для наближення функції з розривами першого роду та область визначення яких розбита на криволінійні трапеції. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів.

1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Съярле Ф.* Метод конечних элементов для эллиптических задач / Пер. с англ. Б. И. Квасова. – Москва: Мир, 1980. – 512 с.
3. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
4. *Петровская Н. Б.* Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка. – Математ. моделирование. – 2005. – **17**, № 1. – С. 79–92.
5. *Arnold D. N. et al.* Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. – 2002. – **39**, No 5. – P. 1749–1779.
6. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Тавр. вісн. інформатики та математики. – 2011. – № 1. – С. 63–72.
7. *Литвин О. Н., Першина Ю. И.* Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) // Компьютерная математика. – 2011. – № 1. – С. 96–105.
8. Литвин О. *М., Першина Ю. І.* Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – 2011. – No 5. – С. 34–47.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 19.12.2011

О. Н. Литвин, Ю. И. Першина

Приближение разрывных функций разрывными сплайнами на прямоугольнике с одной криволенейной стороной

Приведен метод построения разрывных интерполяционных и аппроксимационных сплайнов для приближения разрывных функций, область определения которых разбивается на криволинейные трапеции. Причем построенные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны.

O. M. Lytvyn, Y. I. Pershina

Approximation of discontinuous functions by discontinuous splines on a rectangle with one curvilinear side

A method of construction of discontinuous interpolation and approximation splines for the approximation of the discontinuous functions whose domain of definition is divided into curvilinear trapezoids is presented. The constructed discontinuous splines include classical continuous splines as a special case.