УДК 519.85

В. В. Семкин, А. М. Чугай

Нормализованная Ф-функция параллелепипеда и сфероцилиндра

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

Построена нормализованная Ф-функция для параллелепипеда и сфероцилиндра. Данная Ф-функция может быть использована для построения математической модели задачи компоновки объектов с учетом заданных расстояний между ними.

Интенсивное развитие математических методов решения экстремальных задач обусловили успехи в поиске оптимальных решений задач геометрического проектирования [1]. Одним из важных направлений развития исследуемого класса задач является построение их математических моделей и разработка методов их решения. Особый интерес представляют задачи нерегулярного размещения трехмерных геометрических объектов, в которых производится поиск оптимального расположения объектов в некоторой области пространства при соблюдении ограничений на положение этих объектов. Данные ограничения задаются обычно в виде минимальных или максимальных допустимых расстояний между геометрическими объектами и между геометрическими объектами и границей области размещения.

Целью данной работы является построение нормализованной Ф-функции [2] для параллелепипеда и сфероцилиндра, которая является основным инструментом при построении математических моделей задач упаковки рассматриваемых объектов.

Пусть задан параллелепипед

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 \colon -a \leqslant x \leqslant a,\ -b \leqslant y \leqslant b, -c \leqslant z \leqslant c\}$$

и сфероцилиндр S, образованный объединением цилиндра

$$C = \{(x, y, z) \in R^3 \colon x^2 + y^2 \leqslant r^2,\ -h \leqslant z \leqslant h\}$$

и двух сферических сегментов высотой $w_j > 0$, отсекаемых от шаров

$$O_j = \{(x, y, z) \in R^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \rho_j^2\},$$

где $\rho_j = (r^2 + w_j^2)/(2w_j)$, $j = 1, 2$. Также обозначим $\tau_j = \rho_j - w_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$ (рис. 1).

Для параллелепипеда и сфероцилиндра допускаются только аффинные преобразования трансляции. Пусть $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — векторы трансляции параллелепипеда и сфероцилиндра соответственно.

Для построения Ф-функции зададим порядок нумерации вершин и ребер параллелепипеда, показанный на рис. 2.

Для математического описания расположения рассматриваемых объектов на заданном расстоянии достаточно описать в аналитическом виде

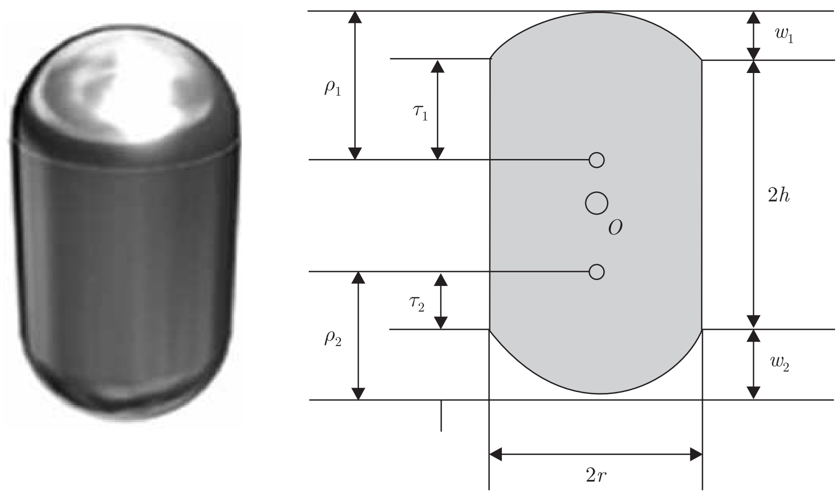


Рис. 1. Сфероцилиндр

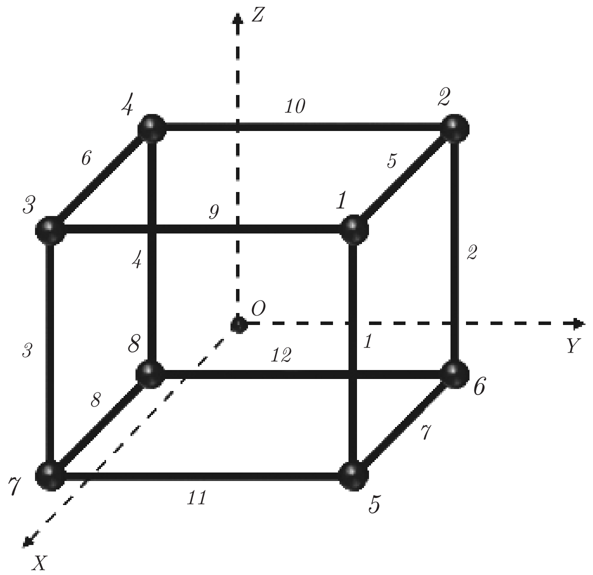


Рис. 2. Порядок нумерации ребер и вершин параллелепипеда

расстояние между одной из граней параллелепипеда и боковой цилиндрической гранью сфероцилиндра;

расстояние между одним из ребер параллелепипеда и поверхностью сфероцилиндра;

расстояние между одной из вершин параллелепипеда и поверхностью сфероцилиндра, а также построить d-уровень нормализованной Φ-функции при $u_1 = 0$.

Чтобы определить расстояние между гранями параллелепипеда и сфероцилиндром, введем следующие функции:

$$\eta_1(u_2) = x - A, \qquad \eta_2(u_2) = y - B, \qquad \eta_3(u_2) = -x - A,$$

$$\eta_4(u_2) = -y - B, \qquad \eta_5(u_2) = z - H - w_2, \qquad \eta_6(u_2) = -z - H - w_1,$$

где $A = a + r$, $B = b + r$, $H = h + c$.

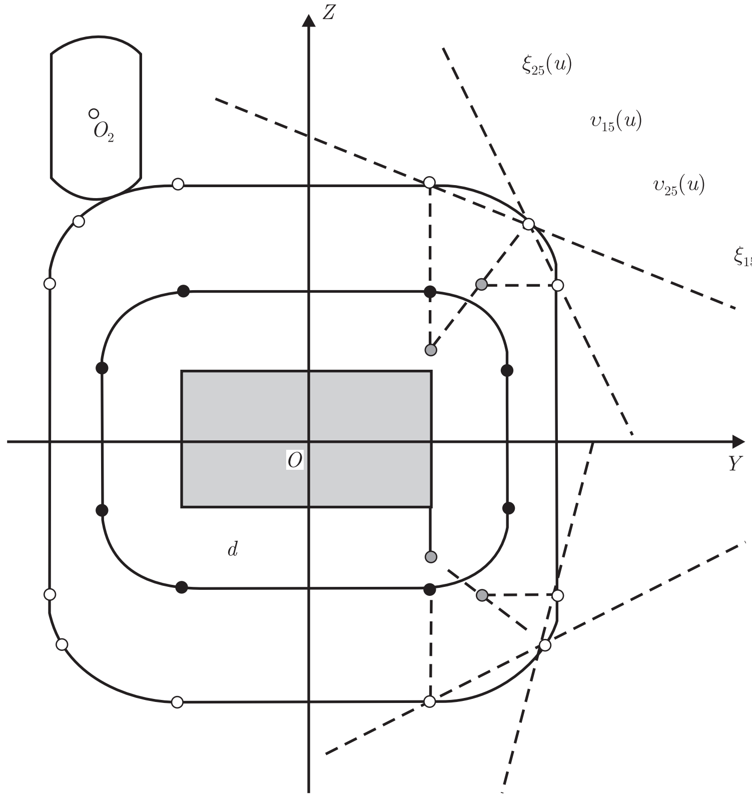


Рис. 3. Сечение поверхности d-уровня Ф-функции плоскостью YOZ

Очевидно, если хотя бы одно из неравенств $\eta_i(u_2) \geqslant 0$, то сфероцилиндр не пересекает ни одну из граней параллелепипеда. Это позволяет построить функцию

$$\chi_1(u_2) = \max_{i=1,\ldots,6} \eta_i(u_2) \tag{1}$$

такую, что если $\chi_1(u_2) \geqslant 0$, то $\operatorname{int} P \bigcap \operatorname{int} S = \varnothing$, где $\operatorname{int} P$ — внутренность P [3].

Пусть сечение поверхности d-уровня Ф-функции плоскостью YOZ имеет вид, представленный на рис. 3, откуда видно, что поверхность d-уровня формируется не одинаково для различных ребер. Часть поверхности d-уровня, которая определяет расстояние между ребрами *1–4* и сфероцилиндром, определяется частью поверхности цилиндра, ось которого проходит через соответствующее ребро. Часть поверхности d-уровня, которая определяет расстояние между ребрами *5–12* и сфероцилиндром, определяется объединением частей поверхностей двух цилиндров, которые отсекаются с помощью плоскостей.

Для того чтобы смоделировать расположение сфероцилиндра на расстоянии d от ребер *1–4* параллелепипеда, введем такие функции:

$$\upsilon_{j_1}(u_2) = \sqrt{\varphi_x^2(u_2) + \varphi_y^2(u_2)} - r,$$

$$\zeta_{j_1}(u_2) = \varphi_x(u_2) + \varphi_y(u_2) - r,$$

где $\varphi_x(u_2) = (-1)^{k_x} x - a$, $\varphi_y(u_2) = (-1)^{k_y} y - b$, $k_x,\ k_y \in \{0, 1\}$, $j_1 = k_x + 2k_y + 1$.

Это дает возможность построить функцию

$$\phi_{j_1}(u_2) = \min\{\upsilon_{j_1}(u_2), \zeta_{j_1}(u_2)\}, \tag{2}$$

такую, что если $\phi_{j_1}(u_2) \geqslant 0$, то $\operatorname{int} P \bigcap \operatorname{int} S = \varnothing$.

Для того чтобы определить расстояние между ребрами *5–8* (рис. 2) параллелепипеда и сфероцилиндром, введем следующие функции:

$$\upsilon_{1j_2}(u_2) = \sqrt{\varphi_y^2(u_2) + (\varphi_z(u_2) - h + \tau_s)^2} - \rho_s, \qquad \zeta_{1j_2}(u_2) = \frac{w_s}{r}\varphi_y(u_2) + \varphi_z(u_2) - h - w_s,$$

$$\upsilon_{2j_2}(u_2) = \sqrt{(\varphi_y(u_2) - r)^2 + (\varphi_z(u_2) - h)^2}, \qquad \zeta_{2j_2}(u_2) = \varphi_y(u_2) + \frac{r - w_s}{r + w_s}(\varphi_z(u_2) - h) - r,$$

где $\varphi_z(u_2) = (-1)^{k_z} z - c$, $k_z \in \{0, 1\}$, $s = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j_2 \in \{7, 8\} \\ 2, & \text{если} \quad j_2 \in \{5, 6\} \end{cases}$, $j_2 = k_y + 2k_z + 5$.

Построим функции

$$\begin{aligned} &\phi_{1j_2}(u_2) = \min\{\upsilon_{1j_2}(u_2), \zeta_{1j_2}(u_2)\}, \\ &\phi_{2j_2}(u_2) = \min\{\upsilon_{2j_2}(u_2), \zeta_{2j_2}(u_2)\}, \\ &\phi_{j_2}(u_2) = \max\{\phi_{1j_2}(u_2), \phi_{2j_2}(u_2)\}, \end{aligned} \tag{3}$$

такие, что $\phi_{j_2}(u_2) \geqslant 0$, тогда $\operatorname{int} P \bigcap \operatorname{int} S = \varnothing$.

Для определения расстояния между ребрами *9–12* (рис. 2) параллелепипеда и сфероцилиндром, введем следующие функции:

$$\upsilon_{1j_3}(u_2) = \sqrt{\varphi_x^2(u_2) + (\varphi_z(u_2) - h + \tau_s)^2} - \rho_s, \qquad \zeta_{1j_3}(u_2) = \frac{w_s}{r}\varphi_x(u_2) + \varphi_z(u_2) - h - w_s,$$

$$\upsilon_{2j_3}(u_2) = \sqrt{(\varphi_x(u_2) - r)^2 + (\varphi_z(u_2) - h)^2}, \qquad \zeta_{2j_3}(u_2) = \varphi_x(u_2) + \frac{r - w_s}{r + w_s}(\varphi_z(u_2) - h) - r,$$

где $s = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j_3 \in \{11, 12\} \\ 2, & \text{если} \quad j_3 \in \{9, 10\} \end{cases}$, $j_3 = k_x + 2k_z + 9$.

Это дает возможность построить функции

$$\begin{aligned} &\phi_{1j_3}(u_2) = \min\{\upsilon_{1j_3}(u_2), \zeta_{1j_3}(u_2)\}, \\ &\phi_{2j_3}(u_2) = \min\{\upsilon_{2j_3}(u_2), \zeta_{2j_3}(u_2)\}, \\ &\phi_{j_3}(u_2) = \max\{\phi_{1j_3}(u_2), \phi_{2j_3}(u_2)\}, \end{aligned} \tag{4}$$

такие, что $\phi_{j_3}(u_2) \geqslant 0$, тогда $\operatorname{int} P \bigcap \operatorname{int} S = \varnothing$.

На основании выражений (2)–(4) построим функцию

$$\chi_2(u_2) = \max_{j=1,\ldots,12} \phi_j(u_2), \tag{5}$$

которая обладает следующим свойством: если $\chi_2(u_2) \geqslant 0$, то $\operatorname{int} P \bigcap \operatorname{int} S = \varnothing$.

Из рис. 3 видно, что часть поверхности d-уровня, которая определяет расстояние между вершиной параллелепипеда и сфероцилиндром, определяется объединением частей поверхностей шара и тора, которые отсекаются с помощью плоскостей и эллиптических цилиндров. Для того чтобы смоделировать расположение сфероцилиндра на расстоянии d от вершины параллелепипеда, введем следующие функции:

$$\vartheta_i(u_2) = \sqrt{\varphi_x^2(u_2) + \varphi_y^2(u_2) + (\varphi_z(u_2) - h + \tau_s)^2} - \rho_s,$$

$$\sigma_i(u_2) = \frac{w_s}{r}\varphi_x(u_2) + \frac{w_s}{r}\varphi_y(u_2) + \varphi_z(u_2) - h - w_s,$$

$$\varpi_{i1}(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi_x(u_2) + \varphi_y(u_2) + \sqrt{2}(\varphi_z(u_2) + \tau_s - h))^2 + (\varphi_x(u_2) - \varphi_y(u_2))^2} - r,$$

$$\varpi_{i2}(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2}\varphi_x(u_2)+\varphi_y(u_2)+\varphi_z(u_2)+\tau_s-h)^2+(\varphi_y(u_2)-(\varphi_z(u_2)+\tau_s-h))^2}-\rho_s,$$

$$\varpi_{i3}(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varphi_x(u_2)+\sqrt{2}\varphi_y(u_2)+\varphi_z(u_2)+\tau_s-h)^2+(\varphi_x(u_2)-(\varphi_z(u_2)+\tau_s-h))^2}-\rho_s,$$

где $s = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 5 \leqslant i \leqslant 8, \\ 2, & \text{если} \quad 1 \leqslant i \leqslant 4, \end{cases} \quad i = k_x + 2k_y + 4k_z + 1.$

Эти функции определяют поверхности шара, плоскости и трех эллиптических цилиндров соответственно. А также введем в рассмотрение функции

$$\omega_i(u_2) = \sqrt{(\sqrt{\varphi_x^2(u_2) + \varphi_y^2(u_2)} - r)^2 + (\varphi_z(u_2) - h)^2},$$

$$\delta_i(u_2) = \varphi_x(u_2) + \varphi_y(u_2) + \frac{r - w_s}{r + w_s}(\varphi_z(u_2) - h) - r,$$

$$\kappa_{i1}(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varphi_x(u_2) + \varphi_y(u_2) + \sqrt{2}(\varphi_z(u_2) - h))^2 + (\varphi_x(u_2) - \varphi_y(u_2))^2} - r,$$

$$\kappa_{i2}(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2}\varphi_x(u_2)+\varphi_y(u_2)-r+\varphi_z(u_2)-h)^2+(\varphi_y(u_2)-r-(\varphi_z(u_2)-h))^2}-r,$$

$$\kappa_{i3}(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varphi_x(u_2)-r+\sqrt{2}\varphi_y(u_2)+\varphi_z(u_2)-h)^2+(\varphi_x(u_2)-r-(\varphi_z(u_2)-h))^2}-r,$$

которые определяют поверхности тора, плоскости и трех эллиптических цилиндров соответственно.

Исходя из этого, сформируем функцию

$$\chi_3(u_2) = \max_{i=1,\ldots,8} \psi_i(u_2), \tag{6}$$

где

$$\psi_{i1}(u_2) = \min\{\vartheta_i(u_2), \sigma_i(u_2), \varpi_{i1}(u_2), \varpi_{i2}(u_2), \varpi_{i3}(u_2)\},$$

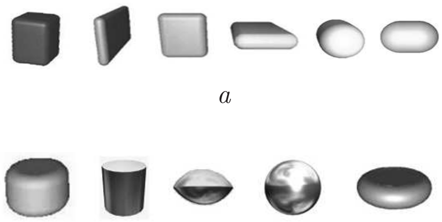
$$\psi_{i2}(u) = \min\{\omega_i(u_2), \delta_i(u_2), \kappa_{i1}(u_2), \kappa_{i2}(u_2), \kappa_{i3}(u_2)\},$$

$$\psi_i(u_2) = \max\{\psi_{i1}(u_2), \psi_{i2}(u_2)\}, \qquad i = 1, \ldots, 8,$$

такую, что $\chi_3(u_2) \geqslant 0$, тогда $\operatorname{int} P \bigcap \operatorname{int} S = \varnothing$.

На основании функций (1), (5), (6) нормализованная Ф-функция для параллелепипеда и сфероцилиндра может быть представлена в виде

$$\Phi(u_1, u_2) = \max_{i=1,2,3} \chi_i(u_2 - u_1). \tag{7}$$



а

б

Рис. 4. Объекты, полученные из параллелепипеда и сфероцилиндра

Следует отметить, что построенная Ф-функция (7) может быть использована для аналитического описания взаимодействия трехмерных геометрических объектов, граница которых представляет собой эквидистантную поверхность к объектам, полученным в результате вырождения метрических параметров параллелепипеда (рис. 4, *а*) и сфероцилиндра (рис. 4, *б*).

Таким образом, Ф-функция (7) позволяет строить математические модели задач размещения параллелепипедов, сфероцилиндров и геометрических объектов, приведенных на рис. 4, с учетом заданных кратчайших расстояний между ними.

1. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Киев: Наук. думка, 1986. – 268 с.
2. *Stoyan Yu. G.* Ф-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – № 10. – С. 39–44.
3. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. – Москва: Мир, 1966. – 594 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 09.07.2012

В. В. Сьомкін, А. М. Чугай

Нормалізована Ф-функція паралелепіпеда та сфероциліндра

Побудовано нормалізовану Ф-функцію для паралелепіпеда і сфероциліндра. Дана Ф-функція може бути використана для побудови математичної моделі задачі компоновки об'єктів з урахуванням заданих відстаней між ними.

V. V. Semkin, A. M. Chugay

The normalized Ф-function for a parallelepiped and a spherocylinder

The normalized Ф-function for a parallelepiped and a spherocylinder is built. The Ф-function can be used for the construction of a mathematical model of a layout design problem with regard for the distances between objects.