Доповіді Національної академії наук України

3 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк

Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь із операторами узагальненого диференціювання

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Досліджено властивості операторів узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва в узагальнених просторах типу S. Встановлено розв'язність задачі Коші та двоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з такими операторами в просторах основних та узагальнених функцій.

У теорії аналітичних у крузі функцій вивчається питання про зображення лінійних неперервних відображень у вигляді диференціальних або інтегральних операторів скінченного та нескінченного порядків, операторів узагальненого диференціювання та інтегрування. Різні аспекти цієї проблеми досліджували Ж. Дельсарт, Ж.-Л. Ліонс, Ю. Ф. Коробейник, М. І. Нагнибіда, С. С. Лінчук, В. В. Напалков, В. А. Ткаченко, В. П. Подпорін та інші математики. Важливий клас операторів узагальненого диференціювання та інтегрування утворюють оператори Гельфонда–Леонтьєва, введені в середині XX ст. при вивченні розкладів цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати в просторі A_∞ однозначних і цілих в $\mathbb{C}$ функцій з топологією компактної збіжності (A_∞ не є нормованим простором, але в той же час A_∞ — простір Фреше). Прикладами інших просторів, елементами яких є цілі функції і які використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними, є простори типу S — простори S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$, введені І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим в [1]. Топологія вказаних просторів відмінна від топології простору A_∞, функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp(-a|x|)$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

У цій роботі досліджуються оператори узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва скінченного та нескінченного порядків в узагальнених просторах типу S — просторах $S_{l_k}^{m_n}$, які будуються за певними послідовностями $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел. Це дозволяє розширити клас еволюційних рівнянь, для яких природним середовищем дослідження задачі Коші та нелокальних за часом задач є простори типу S.

Зазначимо також, що на теперішній час найбільш повно вивчені простори S_{α}^{β}, які будуються за послідовностями $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$, $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha > 0$, $\{n, k\} \subset \mathbb{Z}_+$. Тому в роботі попередньо досліджується топологічна структура просторів $S_{l_k}^{m_n}$ та даються критерії належності нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій до таких просторів.

1. Розглянемо послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел, яка має такі властивості:

1) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geqslant n_0$: $m_n \leqslant m_{n+1}$; $m_n > 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

2) $\forall\, \alpha > 0\ \exists\, c_\alpha > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geqslant c_\alpha \cdot \alpha^n$;

3) $\exists\, M > 0\ \exists\, h > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leqslant M h^n m_n$;

4) $\exists\, \gamma > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$: $m_n^2 \leqslant \gamma m_{n-1} \cdot m_{n+1}$;

5) $\exists\, A > 0\ \exists\, L > 0\ \forall\, \{n, l\} \subset \mathbb{Z}_+$: $m_n \cdot m_l \leqslant A L^{n+l} m_{n+l}$.

Прикладами даних послідовностей є послідовності Жевре $m_n = (n!)^{\beta}$ та $m_n = n^{n\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де $\beta > 0$ — фіксований параметр [2].

Наслідуючи [1], символом S^{m_n} позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists\, B > 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ \qquad \exists\, c_k > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_k B^n m_n$$

(сталі c_k, $B > 0$ залежать від φ). Топологічна структура в S^{m_n} визначається так. Символом $S^{m_n, B}$ позначимо сукупність таких функцій $\varphi \in S^{m_n}$, що

$$\forall\, \overline{B} > B \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{k,\overline{B}} \cdot \overline{B}^n m_n, \qquad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Інакше, $S^{m_n, B}$ складається з тих функцій $\varphi \in S^{m_n}$, які при довільному $\delta > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant c_{k\delta} (B + \delta)^n m_n, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{k\delta} = \sup_{x,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(B + \delta)^n m_n}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \qquad \delta \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Об'єднання просторів $S^{m_n, B}$ за всіма $B \in \mathbb{N}$ збігається з простором S^{m_n}.

Покладемо $\rho_0(x) = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} (|x|^n / m_n)$, $|x| \geqslant 1$; $\rho(x) = 1$, якщо $|x| < 1$, і $\rho(x) = \rho_0(x)$, якщо $|x| \geqslant 1$. Зазначимо, що ρ — неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(x) \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$; при цьому $\ln \rho$ — опукла на $(0, \infty)$ функція.

Нехай $\rho_n := \inf\limits_{x \neq 0} (\rho(x) / |x|^n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ має такі властивості: а) вона монотонно спадна; б) $\exists\, \omega > 1\ \forall\, n \geqslant 1$: $\rho_{n-1}/\rho_n \leqslant \omega$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Розглянемо простір S^{m_n}, де послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ має спеціальний вигляд, а саме, $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ притаманні властивості а–в (можна безпосередньо переконатися в тому, що тоді послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ має властивості 1–5).

Теорема 1. *Функція $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ є елементом простору $S^{n!\rho_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$\exists\, b > 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ \qquad \exists\, c_k > 0 \qquad \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}\colon\ |z^k \varphi(z)| \leqslant c_k \rho(by),$$

де

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho_0(y), & |y| \geqslant 1, \end{cases} \qquad \rho_0(y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n}{n!\rho_n}, \qquad |y| \geqslant 1.$$

Розглянемо послідовності $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, та $l_k = k!d_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, де послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ мають властивості а–в. Символом $S_{l_k}^{m_n}$ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists\, c, A, B > 0 \qquad \forall\, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leqslant cA^k B^n l_k m_n.$$

Теорема 2. *Функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{l_k}^{m_n}$ тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$\exists\, a, b, c > 0 \qquad \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}\colon\ |\varphi(z)| \leqslant c\gamma(ax)\rho(by),$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_k \dfrac{l_k}{|x|^k}, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \qquad \rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_n \dfrac{|y|^n}{m_n}, & |y| \geqslant 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\gamma(x) = 1/\widetilde{\gamma}(x)$, де $\widetilde{\gamma}(x) = 1$, $|x| < 1$ і $\widetilde{\gamma}(x) = \sup\limits_k(|x|^k/l_k)$, якщо $|x| \geqslant 1$. Отже, γ — неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, монотонно спадна на проміжку $[1, +\infty)$, $0 < \gamma(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, якщо $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, то γ задовольняє нерівності [1]:

$$\exp\left(-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right) \leqslant \gamma(x) \leqslant c\exp\left(-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right), \qquad c = e^{\alpha e/2}.$$

$S_{l_k}^{m_n}$ збігається з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$; система норм в $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(x)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n}, \qquad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Зауваження 1. У введених просторах визначені й обмежені (а, отже, і неперервні) лінійні оператори, важливі для аналізу; насамперед це оператори множення на x, на всі многочлени, на нескінченно диференційовні функції, які задовольняють певні умови (зокрема, на функції із вказаних просторів), оператори диференціювання, зсуву та розтягу.

2. Нагадаємо, що оператор узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва (який позначатимемо символом $D^m(F, \cdot)$, $m \in \mathbb{N}$ — фіксоване) у просторі A_R, $0 < R \leqslant +\infty$, — просторі однозначних і аналітичних у крузі $K_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ функцій з топологією компактної збіжності, визначається за допомогою фіксованої аналітичної функції

$F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $F\in A_R$, таким чином [3]: якщо $\varphi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ — довільна функція з простору A_R, то, за означенням,

$$D^m(F,\varphi)(z)=\sum_{k=m}^{\infty} b_k \frac{a_{k-m}}{a_k} z^{k-m}, \tag{1}$$

при цьому вважається, що $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k-m]{|a_{k-m}/a_k|}=1$.

Відзначимо відомі властивості оператора $D^m(F,\cdot)$ [3]:

1) $D^m(F,\varphi_1+\varphi_2)=D^m(F,\varphi_1)+D^m(F,\varphi_2)$;

2) $D^m(F,c\varphi)=cD^m(F,\varphi)$, $c=\mathrm{const}$;

3) $D^m(e^z,\varphi)=d^m\varphi/dz^m$;

4) $D^m(F,D^n(F,\varphi))=D^{m+n}(F,\varphi)$.

Ці властивості вказують на те, що $D^m(F,\varphi)$ дійсно можна розуміти як узагальнену похідну порядку m функції φ, породжену функцією $F(z)$ (замість функції e^z).

Нехай $F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — ціла функція, коефіцієнти $\{a_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$ якої задовольняють умову

$$\exists\,\alpha>0 \qquad \exists\,L>1 \qquad \forall\,k\geqslant m\colon\ \left|\frac{a_k}{a_{k+m}}\right|\leqslant \alpha L^{k+m} \qquad (m\in\mathbb{N} \text{ — фіксоване}). \tag{2}$$

Визначимо формально оператор узагальненого диференціювання в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ за формулою (1), де $z=x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ — довільна функція з простору $S_{m_k}^{m_n}$.

Теорема 3. *Оператор узагальненого диференціювання $D^m(F,\cdot)$ визначений коректно на $S_{m_k}^{m_n}$ для довільно фіксованого $m\in\mathbb{N}$ і неперервно відображає цей простір в себе.*

Прикладом оператора $D^m(F,\cdot)$, який діє в просторі $S_{m_k}^{m_n}$, може служити оператор, побудований за цілою функцією

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \equiv 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{Q(1)Q(2)\ldots Q(k)},$$

де Q — поліном: $Q(x)=a_p x^p+\ldots+a_1 x$, причому $Q(k)\neq 0$, $k\in\{1,2,\ldots\}$ (якщо $Q(k)=k$, то $F(z)=e^z$). У цьому випадку [3]

$$D^m(F,\varphi)=\sum_{k=m}^{mp} \frac{\Delta_k^{(m)}}{k!} z^{k-m}\varphi^{(k)}(z),$$

де коефіцієнти $\Delta_k^{(m)}$ мають спеціальний вигляд. Можна також довести, що коефіцієнти a_k, $k\in\mathbb{N}$, задовольняють умову (2) зі сталою $L=\gamma L_0>1$, $\gamma=\max\{1, a_0 p\cdot 2^p\}$, $L_0=e^{c_0}>1$, $c_0>1$.

Нехай $g(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, $z\in\mathbb{C}$, — деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ задано оператор узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва нескінченного порядку $g(D(F,\cdot)) \equiv \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m D^m(F,\cdot)$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$ ряд

$$g(D(F,\varphi))(x) := \sum_{m=0}^{\infty} c_m D^m(F,\varphi)(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

зображає деяку функцію з простору $S_{m_k}^{m_n}$.

Теорема 4. *Якщо ціла функція g задовольняє умову*

$$\exists\, a > 0 \qquad \exists\, b > 0 \qquad \exists\, c > 0 \qquad \forall\, z = x + iy \in C\colon\ \ |g(z)| \leqslant c\rho(ax)\rho(by), \tag{3}$$

то в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений оператор $Ag := g(D(F,\cdot))$, який неперервно відображає $S_{m_k}^{m_n}$ в $S_{m_k}^{m_n}$.

Наприклад, функція $g(z) = e^{tz}$, $z \in \mathbb{C}$, де $t > 0$ — фіксований параметр, задовольняє умову (3). Справді, скориставшись властивостями опуклих функцій (функція $\ln\rho$ є опуклою на $(0,\infty)$), знайдемо, що

$$|e^{\alpha z}| \leqslant e^{\alpha|x|} \leqslant ce^{\ln\rho(ax)+\ln\rho(ay)} = c\rho(ax)\rho(ay), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $a = t\varepsilon$, якщо $t \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число, і $a = \varepsilon$, якщо $\alpha \in (0,1)$. Отже, в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним оператор $e^{tD(F,\cdot)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} t^m D^m(F,\cdot)/m!$, який відображає простір $S_{m_k}^{m_n}$ в себе. У просторі $S_{m_k}^{m_n}$ визначений і є неперервним також оператор $e^{tP(A)}$, де $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{p_0} \alpha_k D^k(F,\cdot)$.

3. У просторі $S_{m_k}^{m_n}$ розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \qquad 0 < T < \infty, \tag{4}$$

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = \varphi_0, \qquad \varphi_0 \in S_{m_k}^{m_n}, \tag{5}$$

де $P(A)$ — оператор, визначений вище.

Під розв'язком задачі (4), (5) розумітимемо функцію $u(t,x)$, диференційовну за t, яка при кожному $t \in [0,T]$ є елементом простору $S_{m_k}^{m_n}$, задовольняє рівняння (4) та початкову умову (5) в тому сенсі, що $u(t,\cdot) \to \varphi_0$ при $t \to +0$ за топологією простору $S_{m_k}^{m_n}$; при цьому u неперервно залежить від φ_0. Правильним є таке твердження.

Теорема 5. *Задача Коші* (4), (5) *розв'язна в просторі $S_{m_k}^{m_n}$ (у вказаному розумінні); розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t,x) = e^{tP(a)}\varphi_0(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi_0(x).$$

Символом A позначимо оператор $D^p(F,\cdot)$, $p \geqslant 1$ — фіксоване. Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \qquad (t,x) \in \Omega, \tag{6}$$

розглянемо нелокальну двоточкову за часом задачу

$$\mu_1 u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_2 u(t,\cdot)|_{t=T} = \varphi, \qquad \varphi \in S_{m_k}^{m_n}, \tag{7}$$

де $T \in (0,\infty)$, $\{\mu_1,\mu_2\} \subset (0,\infty)$ — фіксовані числа, $\mu_1 > \mu_2$.

Як і у випадку задачі Коші (4), (5), розв'язком задачі (6), (7) називатимемо функцію $u(t,\cdot) \in C^1([0,T], S_{m_k}^{m_n})$, яка є розв'язком рівняння (6) і задовольняє умову (7) в тому розумінні, що $\mu_1 \lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot) - \mu_2 \lim\limits_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \varphi$, де границі розглядаються в просторі $S_{m_k}^{m_n}$.

Теорема 6. *Двоточкова задача* (6), (7) *розв'язна в просторі* $S_{m_k}^{m_n}$; *розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t,x) = \mu_2^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-(n+1)} e^{(t+nT)A} \varphi(x), \qquad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} > 1.$$

4. У просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$ (просторі, топологічно спряженому до $S_{m_k}^{m_n}$) розглянемо рівняння

$$\frac{du(t)}{dt} = Bu(t), \qquad t \in [0,T], \qquad 0 < T < \infty, \tag{8}$$

де B — оператор, спряжений до оператора $D^n(F,\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ — фіксоване. Якщо для рівняння (8) задано умову

$$\mu_1 u(t)|_{t=0} - \mu_2 u(t)|_{t=T} = \psi, \qquad \psi \in (S_{m_k}^{m_n})' \tag{9}$$

(μ_1, $\mu_2 > 0$, $\mu_1 \neq \mu_2$ — фіксовані параметри), то під розв'язком двоточкової задачі (8), (9) розумітимемо абстрактну функцію параметра $t \in [0,T]$ із значеннями в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$, яка задовольняє рівняння (8) та умову (9) в просторі $(S_{m_k}^{m_n})'$. Правильним є таке твердження.

Теорема 7. *Двоточкова задача* (8), (9) *розв'язна в просторі* $(S_{m_k}^{m_n})'$, *при цьому*

$$\langle u(t),\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \overline{g_k(t)}, \qquad t \in [0,T], \qquad \varphi \in S_{m_k}^{m_n},$$

$g(t) = (g_0(t), g_1(t), \ldots) \in l_1 \cong c_0'$ *при кожному* $t \in [0,T]$.

Зауважимо, що компоненти $g_k(t)$ знаходимо за відповідними формулами; для того щоб уникнути громіздких записів, наведемо лише деякі з них:

$$g_i(t) = \frac{\psi_i}{\mu_1 - \mu_2}, \qquad i \in \{0,1,\ldots,n-1\},$$

$$g_n(t) = \frac{\overline{a}_0}{\overline{a}_n} \frac{\psi_0}{\mu_1 - \mu_2} \left(t + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} T\right) + \frac{\psi_n}{\mu_1 - \mu_2}$$

і т. д. Тут $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots) = \widetilde{\psi} \in c_0' \cong l_1$, функціонал $\widetilde{\psi}$ породжується функціоналом $\psi \in (S_{m_k}^{m_n})'$ за певним правилом, компоненти ψ_i, $i \in \{0,1,\ldots\}$ знаходяться явно.

Зауваження 2. Якщо $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = 1$, то умова (9) — початкова умова для рівняння (8). Отже, в цьому випадку задача (8), (9) — задача Коші.

Як приклад, розглянемо задачу (8), (9) з граничним елементом $\psi = \delta$, де δ — дельта-функція Дірака. У цьому випадку безпосередньо знаходимо, що для довільної функції $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in S_{m_k}^{m_n}$ маємо

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \frac{b_0}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\overline{a}_0 b_n}{\overline{a}_n(\mu_1 - \mu_2)} \left(t + \frac{\mu_2 T}{\mu_1 - \mu_2} \right) + \cdots .$$

Ця формула задає функціонал $u(t)$ на $S_{m_k}^{m_n}$ при кожному $t \in [0, T]$, який є розв'язком вказаної задачі.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.
3. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – Москва: Наука, 1981. – 320 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 26.07.2012

В. В. Городецкий, О. В. Мартынюк

Задача Коши и двухточечная задача для эволюционных уравнений с операторами обобщенного дифференцирования

Исследованы свойства операторов обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева в обобщенных пространствах типа S. Установлена разрешимость задачи Коши и двухточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с такими операторами в пространствах основных и обобщенных функций.

V. V. Gorodetsky, O. V. Martynyuk

The Cauchy problem and the two-point problem for the evolution equations with operators of generalized differentiation

We have investigated the properties of the Gelfond–Leontiev operators of generalized differentiation in generalized spaces of the S type. The solvability of the Cauchy problem and the two-point in time problem for the evolution equations with such operators in the spaces of basic and generalized functions is established.