УДК 519.24

Академік НАН України **В. С. Королюк, І. В. Самойленко**

Потенціальний оператор процесу Орнштейна–Уленбека та його застосування

Розглянуто випадкову еволюцію з перемикаючим процесом типу Орнштейна–Уленбека. Знайдено потенціальний оператор процесу Орнштейна–Уленбека, що дозволяє визначити генератор граничної випадкової еволюції на зростаючому часовому інтервалі. Описано можливі застосування та властивості таких процесів.

Відомо, що гранична поведінка стохастичних систем з перемиканням на зростаючих інтервалах часу характеризується усередненням граничного процесу за стаціонарною мірою перемикаючого процесу [1]. Таким перемикаючим процесом можуть бути ергодичні марковські та напівмарковські процеси. Зауважимо, що при відшуканні генератора граничного процесу важливу роль відіграє потенціальний оператор перемикаючого процесу.

З точки зору можливих застосувань одним з найцікавіших варіантів перемикаючого процесу є процес типу Орнштейна–Уленбека, а отже, постає задача про визначення відповідного потенціального оператора. Останній оператор є, очевидно, інтегральним, оскільки він обернений до диференціального генератора процесу Орнштейна–Уленбека. Метою цієї роботи є відшукання простого явного вигляду ядра потенціального оператора процесу Орнштейна–Уленбека та обговорення можливих застосувань таких процесів.

Цікавим результатом роботи є той факт, що наявність перемикання у вигляді процесу Орнштейна–Уленбека призводить до збільшення швидкості випадкової еволюції на великому часовому проміжку. Стосовно застосувань (див. п. 2 та приклади 1, 2) це може означати, зокрема, що велика волатильніcть відсоткової ставки по кредитах прискорює як швидкість зростання, так і швидкість падіння виробництва. Але ж загальновідомо, що під час періодів економічного зростання коливання на біржі, як і зміна відсоткових ставок, незначні, натомість вони істотно збільшуються саме під час економічних спадів. Звідси можна зробити висновок, що поведінка банків та біржових гравців не прискорює економічне зростання, але значно збільшує швидкість падіння економіки.

Крім того, перемикаючий процес можна трактувати як керуючий процес, завдяки якому еволюція прямує до свого рівноважного значення, оскільки наявність перемикаючого процесу призводить до "притягання" поточного значення випадкової еволюції до її середнього значення.

Роботу побудовано таким чином: у п. 1 подано кілька загальновідомих означень, які будуть використані нами, та наведено відповідний приклад; у п. 2 описано можливі застосування випадкових еволюцій з перемикаючим процесом типу Орнштейна–Уленбека; у п. 3 доведено теорему про явний вигляд ядра потенціального оператора для процесу Орнштейна–Уленбека.

1. Означення потенціального оператора та процесу Орнштейна–Уленбека. Позначимо через $\mathbf{B}$ банахів простір дійснозначних вимірних функцій з sup-нормою $\|\cdot\|$, яка означена на просторі станів E.

Нехай $Q\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ — лінійний оператор на $\mathbf{B}$. Введемо такі підпростори:

$$\mathcal{D}_Q := \{\varphi\colon \varphi \in \mathbf{B}, Q\varphi \in \mathbf{B}\} \text{ — область визначення } Q,$$

$$\mathcal{R}_Q := \{\psi\colon \psi = Q\varphi, \varphi \in \mathbf{B}\} \text{ — підпростір значень } Q,$$

$$\mathcal{N}_Q := \{\varphi\colon Q\varphi = 0, \varphi \in \mathbf{B}\} \text{ — підпростір нулів } Q.$$

Оператор Q обмежений, якщо існує константа $C > 0$ така, що $\|Q\varphi\| < C\|\varphi\|$, $\varphi \in \mathcal{D}_Q$.

Обмежений лінійний оператор Q назвемо зведено-оборотним (детальніше див. [1, 2]), якщо банахів простір $\mathbf{B}$ можна зобразити як пряму суму двох підпросторів

$$\mathbf{B} = \mathcal{N}_Q \oplus \mathcal{R}_Q,$$

де нуль-підпростір має нетривіальну розмірність

$$\dim \mathcal{N}_Q \geqslant 1.$$

Останнє подання визначає проектор на підпростір $\mathcal{N}_Q$:

$$\Pi\varphi := \begin{cases} \varphi, & \varphi \in \mathcal{N}_Q, \\ 0, & \varphi \in \mathcal{R}_Q. \end{cases}$$

Натомість оператор $I - \Pi$ є проектором на підпростір $\mathcal{R}_Q$

$$(I - \Pi)\varphi := \begin{cases} 0, & \varphi \in \mathcal{N}_Q, \\ \varphi, & \varphi \in \mathcal{R}_Q. \end{cases}$$

Потенціальним оператором зведено-оборотного оператора Q називається оператор [1, 2]

$$R_0 := \Pi - (Q + \Pi)^{-1} = (\Pi - Q)^{-1} - \Pi.$$

Потенціальний оператор має такі властивості:

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I, \tag{1}$$

$$\Pi R_0 = R_0 \Pi = 0. \tag{2}$$

Процес Орнштейна–Уленбека $x(t) \in \mathbb{R}$ задається розв'язком стохастичного рівняння (означено в роботі [3], детально див. [4]):

$$dx(t) = -cx(t)dt + \sigma dw(t), \tag{3}$$

де c, $\sigma > 0$, $w(t)$ — стандартний вінерівський процес.

У просторі двічі диференційовних функцій процес Орнштейна–Уленбека задається генератором

$$Q\varphi(x) = \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(x) - cx\varphi'(x). \tag{4}$$

Позначимо $C_0(\mathbb{R})$ простір неперервних функцій виду $\varphi + c$, $c = \text{const}$, де φ дорівнює 0 на нескінченності. Відомо [5], що напівгрупа, задана процесом Орнштейна–Уленбека $x(t)$ на $C_0(\mathbb{R})$, є строго неперервною в нулі, а інваріантна міра процесу має вигляд

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-x^2/2\sigma_0^2}, \qquad \sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{2c}.$$

П р и к л а д 1 (детально див. [1]). Розглянемо випадкову еволюцію $u^\varepsilon(t)$, що задається рівнянням

$$\frac{d}{dt}u^\varepsilon(t) = C^\varepsilon\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right), \qquad u(0) = u \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon \to 0(\varepsilon > 0),$$

тут $x(t)$ — перемикаючий марковський або напівмарковський процес, функція

$$C^\varepsilon(u, x) = C(u, x) + \varepsilon^{-1}C_0(x),$$

де $C(u, x)$ має сенс швидкості еволюції, $C_0(x)$ завдяки нижченаведеній умові балансу породжує флуктуації і, як наслідок, дифузію у граничному процесі.

За умови балансу

$$\Pi C_0(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \pi(dx)C_0(x) = 0$$

граничний оператор

$$\widehat{L} = \Pi C(u, x)\Pi + \Pi C_0(x)R_0C_0(x)\Pi = \widehat{C}(u) + \frac{1}{2}B$$

визначає гауссів процес $\zeta(t)$, $t \geqslant 0$, що задається генератором

$$\widehat{L}\varphi(u) = \widehat{C}\varphi'(u) + \frac{1}{2}B\varphi''(u).$$

Очевидно, якщо перемикаючим процесом виступатиме процес Орнштейна–Уленбека, постає питання про знаходження відповідних операторів Π та R_0.

2. Деякі застосування. Процеси типу Орнштейна–Уленбека широко застосовуються в різних галузях науки, зокрема у фізиці, фінансовій математиці. Нас цікавлять можливі інтерпретації коефіцієнтів c, σ у формулі (3). Очевидно, одним із перших варіантів застосування рівнянь, які описують процеси типу Орнштейна–Уленбека, є модель броунівського руху, запропонована П. Ланжевеном [6]

$$mdv(t) = (\Phi(x) - \gamma v(t))dt + dw(t),$$

де $v(t)$ — швидкість броунівської частинки, m — її маса, $\Phi(x)$ — сила, що виникає при внутрішній та зовнішній молекулярній взаємодії, γ — коефіцієнт в'язкого тертя, $w(t)$ — шумовий член, який виникає за рахунок неперервних зіткнень з молекулами рідини.

Прикладом застосування процесів типу Орнштейна–Уленбека у фінансовій математиці є модель Васичека [7] еволюції відсоткової ставки, яка описується стохастичним рівнянням

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))dt + \sigma dw(t),$$

де β — середній довгостроковий рівень відсоткової ставки, α — параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення відсоткової ставки, σ — параметр волатильності.

Розв'язок має вигляд

$$r(t) = r(0)e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t}\int\limits_0^t e^{\alpha\theta}dw(\theta),$$

другий момент

$$M(r(t))^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

Якщо ми розглянемо процес, який описує еволюцію рівня виробництва в залежності від капіталовкладень, то функція, яка відповідатиме за швидкість зростання виробництва, безумовно залежатиме від рівня процентної ставки по кредитах, отже, ми приходимо до рівняння

$$\frac{d}{dt}u(t) = C(u(t), r(t)), \qquad u(0) = u \in \mathbb{R}.$$

Дослідження довгострокової перспективи змін рівня виробництва змушує звернутись до моделі, описаної в прикладі 1.

3. Ядро потенціального оператора процесу Орнштейна–Уленбека. У банаховому просторі $L_1(\mathbb{R}, \mathfrak{R}, \pi)$, де $\mathfrak{R}$ — борелівська σ-алгебра на $\mathbb{R}$, визначається проектор на нуль-підпростір оператора (4):

$$\Pi\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_0^2} \varphi(x)\, dx.$$

Справді, мають місце такі співвідношення:

$$Q\Pi\varphi(x) = \Pi Q\varphi(x) = 0.$$

Рівність $Q\Pi\varphi(x) = 0$ очевидна, оскільки $\Pi\varphi(x) = \text{const}$ і не залежить від x, друга рівність отримується інтегруванням по частинах:

$$\Pi Q\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \left[\frac{\sigma^2}{2} e^{-x^2/2\sigma_0^2} \varphi'(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{2\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2\sigma_0^2} \varphi'(x)\, dx - \right.$$

$$\left. - c \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2\sigma_0^2} \varphi'(x)\, dx \right] = 0.$$

Наша мета — за допомогою співвідношень (1), (2) знайти явний вигляд ядра потенціального оператора R_0.

Потенціальний оператор процесу Орнштейна–Уленбека розглядався в монографії [2] в досить складній формі:

$$R_0\varphi(x) = -\frac{2}{\sigma^2} \int\limits_0^x e^{\lambda y^2/\sigma^2} \int\limits_y^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2} \varphi(u)\, du dy + \frac{2c^2}{\sigma^2} \int\limits_0^x e^{\lambda y^2/\sigma^2} \int\limits_y^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2} du dy \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2} \varphi(u)\, du + \frac{2c}{\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2/\sigma^2} \int\limits_0^x e^{\lambda y^2/\sigma^2} \int\limits_y^{\infty} e^{-\lambda u^2/\sigma^2} \varphi(u)\, du dy dx.$$

В даній роботі ми знаходимо ядро цього оператора в значно спрощеному вигляді. Основний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Потенціальний опреатор генератора* (4), *що відповідає процесу Орнштейна–Уленбека* (3), *має вигляд*

$$R_0\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_0(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

де ядро

$$R_0(x,y) := \frac{2}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{x\wedge y} e^{-\frac{(y^2-z^2)}{2\sigma_0^2}}\,dz.$$

Доведення. Оскільки потенціальний оператор визначається співвідношеннями (1), (2), для доведення достатньо взяти функцію $\varphi(x) \in \mathcal{R}_Q$, тобто таку, яка задовольняє умову балансу

$$\Pi\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma_0^2}\varphi(x)\,dx = 0,$$

та показати, що для неї виконується умова (1).

Маємо

$$QR_0\varphi(x) = \frac{\sigma^2}{2}(R_0\varphi(x))'' - cx(R_0\varphi(x))'.$$

Лема 1. *Справджуються такі співвідношення:*

$$(R_0\varphi(x))' = \frac{2}{\sigma^2}e^{x^2/2\sigma_0^2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_0^2}\varphi(y)dy,$$

$$(R_0\varphi(x))'' = \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sigma_0^2}e^{x^2/2\sigma_0^2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_0^2}\varphi(y)dy - \varphi(x)\right).$$

Доведення. Легко перевіряється диференціюванням.

Отже, маємо

$$QR_0\varphi(x) = \frac{x}{\sigma_0^2}e^{x^2/2\sigma_0^2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_0^2}\varphi(y)\,dy - \varphi(x) - cx\frac{2}{\sigma^2}e^{x^2/2\sigma_0^2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_0^2}\varphi(y)\,dy =$$

$$= -\varphi(x) = (\Pi - I)\varphi(x).$$

Тепер розглянемо другу частину формули (1):

$$R_0Q\varphi(x) = \frac{2}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{x\wedge y} e^{-\frac{(y^2-z^2)}{2\sigma_0^2}}\,dzQ\varphi(y)\,dy =$$

$$= \frac{2}{\sigma^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2\sigma_0^2}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{z^2/2\sigma_0^2}dzQ\varphi(y)\,dy + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{z^2/2\sigma_0^2}dz\int\limits_{x}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_0^2}Q\varphi(y)\,dy\right). \quad (5)$$

Лема 2. *Справджуються такі співвідношення:*

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{z^2/2\sigma_0^2} dz Q\varphi(y)\, dy = \frac{\sigma^2}{2}\varphi'(x)e^{-x^2/2\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{z^2/2\sigma_0^2} dz - \frac{\sigma^2}{2}\varphi(x),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{z^2/2\sigma_0^2} dz \int\limits_{x}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma_0^2} Q\varphi(y)\, dy = -\frac{\sigma^2}{2}\varphi'(x)e^{-x^2/2\sigma_0^2} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{z^2/2\sigma_0^2} dz.$$

Доведення. Перевіряється інтегруванням по частинах із урахуванням припущення, що $\varphi(x) \in C_0(\mathbb{R})$.

Підставивши отримані в лемі 2 співвідношення в (5), матимемо остаточно

$$R_0 Q\varphi(x) = QR_0\varphi(x) = -\varphi(x) = (\Pi - I)\varphi(x).$$

Теорему доведено.

Приклад 2. Розглянемо функцію $\varphi(x) = x$, знайдемо спочатку значення $R_0\varphi(x)$. Зауважимо, що $\varphi(x) \in \mathcal{R}_Q$, оскільки

$$\Pi\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx = 0.$$

Оскільки для функції $h(x) = -x/c$ та генератора (4) очевидно маємо $Qh(x) = x$, то з (1)

$$R_0 Qh(x) = R_0 x = -h(x) = \frac{1}{c}x.$$

Якщо в прикладі 1 функція $C_0(x) = \varphi(x) = x$, то матимемо

$$B = 2\Pi x R_0 x = \frac{2}{c}\Pi x^2 = \frac{2}{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx = \frac{2}{c}\sigma_0^2.$$

Це означає, що лінійна швидкість перемикання у функції, яка породжує флуктуації, призводить до виникнення дифузійної складової, яка реалізується за допомогою параметра B.

Аналогічно, якщо швидкість еволюції перемикається пропорційно квадратичній функції, тобто $C(u, x) = C(u)x^2$, то швидкість усередненого процесу дорівнює

$$\widehat{C} = C(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx = C(u)\sigma_0^2.$$

Таким чином, наявність перемикання у вигляді процесу Орнштейна–Уленбека призводить до збільшення швидкості процесу на великому часовому проміжку пропорційно множнику σ_0^2.

1. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2005. – 331 p.
2. *Korolyuk V. S., Turbin A. F.* Mathematical foundations of the state lumping of large systems. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 278 p.
3. *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.* On the theory of Brownian motion // Phys. Rev. – 1930. – **36.** – P. 823–841.

4. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Киев: Наук. думка, 1978. – 582 с.
5. *Gikhman I. I., Skorokhod A. V.* The theory of stochastic processes II. – New York; Heidelberg: Springer, 1975. – 441 p.
6. *Ланжевен П.* О теории броуновского движения // Избр. тр. – Москва: Изд-во АН СССР, 1960. – С. 338–341.
7. *Vasicek O.* An equilibrium characterization of the term structure // J. Fin. Econ. – 1977. – **5**. – P. 177–188.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 11.09.2012

Академик НАН Украины **В. С. Королюк, И. В. Самойленко**

Потенциальный оператор процесса Орнштейна–Уленбека и его приложения

Рассмотрена случайная эволюция с переключающим процессом типа Орнштейна–Уленбека. Найден потенциальный оператор процесса Орнштейна–Уленбека, что позволяет определить генератор предельной случайной эволюции на возрастающем временном интервале. Описаны возможные приложения и свойства таких процессов.

Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Koroliuk, I. V. Samoilenko**

Potential operator of the Ornstein–Uhlenbeck process with applications

We study the random evolution with a switching process of the Ornstein–Uhlenbeck type. Potential operator of the Ornstein–Uhlenbeck process is found, which allows us find the generator of limit random evolution on an increasing time interval. We also discuss possible applications and properties of such processes.