УДК 539.3

Академик НАН Украины **В. П. Шевченко, Р. Н. Нескородев**

Об одном варианте уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит

Построено решение задач изгиба трансверсально-изотропных плит, которое приводится к системе дифференциальных уравнений шестого порядка. Предложены соотношения, позволяющие ставить граничные задачи с произвольным заданием внешних усилий по толщине плиты, что существенно расширяет круг предлагаемых к решению задач.

В работе [1] в качестве классической теории изгиба изотропных плит предлагается признать теорию, приводящую к дифференциальным уравнениям шестого порядка. В виде одного из вариантов в этой работе выводится система уравнений, имеющая шестой порядок, и формулируются соответствующие краевые задачи. Предположения, на основе которых строится эта теория, основаны на сравнении выражений для поперечных усилий, полученных в результате интегрирования напряжений τ_{xz} и τ_{yz}, заданных различными соотношениями.

В настоящей работе на основе указанных предположений получена система дифференциальных уравнений теории изгиба транстропных плит, позволяющая удовлетворить всем трем граничным условиям на боковой поверхности, имеющим место в теории изгиба плит. Строится решение бигармонического и метагармонического уравнений уточненной теории изгиба транстропных плит. Решение выражено через произвольные функции обобщенных комплексных переменных [2, 3]. Проведены численные исследования для бесконечной плиты, ослабленной эллиптической полостью.

Основные соотношения уточненной теории изгиба транстропных плит. Приведем представления для перемещений и напряжений, а также систему дифференциальных уравнений теории изгиба плит, построенную по методике, предложенной в работе [1]. Рассмотрим транстропную плиту, имеющую толщину $2h$ и отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$. Оси Ox и Oy расположены к срединной плоскости плиты, а ось Oz — нормальна к этой плоскости. Представление для перемещений выбираются в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1[\partial_1\varphi(x,y) + \partial_2\psi(x,y)],\\ u_2 &= p_1[\partial_2\varphi(x,y) - \partial_1\psi(x,y)], \qquad (1)\\ u_3 &= w_0(x,y) + p_2 w(x,y). \end{aligned}$$

Здесь введены нечетная по переменной z функция $p_1(z)$, характеризующая распределение усилий по толщине плиты, ее производная и интегралы

$$p_0 = \frac{dp_1}{dz}, \qquad p_2 = \int p_1(z)\,dz, \qquad p_3 = \int p_2(z)\,dz.$$

Функции φ и ψ представляют собой соответственно потенциальную и вихревую части поля перемещений, а w_0 и w характеризуют прогиб плиты.

Для построения уточненной теории изгиба транстропных плит используются: уравнения обобщенного закона Гука

$$\sigma_i = A_{i1}\varepsilon_1 + A_{i2}\varepsilon_2 + A_{i3}\varepsilon_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\sigma_4 = A_{44}\varepsilon_4, \qquad \sigma_5 = A_{55}\varepsilon_5, \qquad \sigma_6 = A_{66}\varepsilon_6; \tag{2}$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_i = \partial_i u_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\varepsilon_4 = \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3, \qquad \varepsilon_5 = \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3, \qquad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1; \tag{3}$$

трехмерные уравнения равновесия без учета объемных сил

$$\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 + \partial_3\sigma_5 = 0, \qquad \partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 + \partial_3\sigma_4 = 0, \qquad \partial_1\sigma_5 + \partial_2\sigma_4 + \partial_3\sigma_3 = 0. \tag{4}$$

В представлениях (2)–(4) введены обозначения

$$[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6] \qquad \text{для} \qquad [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}],$$
$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6] \qquad \text{для} \qquad [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}],$$
$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad A_{ij} \text{ — модули упругости.}$$

Уравнения закона Гука (2) с учетом представлений (1) и (3) дают выражения для напряжений в форме

$$\sigma_i = p_1 s_i \qquad (i = 1, 2, 3, 6), \qquad \sigma_4 = A_{44}[\partial_2 w_0 + p_2\partial_2 w + p_0(\partial_2\varphi - \partial_1\psi)],$$
$$\sigma_5 = A_{55}[\partial_1 w_0 + p_2\partial_1 w + p_0(\partial_1\varphi + \partial_2\psi)], \tag{5}$$

где

$$s_i = (A_{i1}\partial_1^2 + A_{i2}\partial_2^2)\varphi + (A_{i1} - A_{i2})\partial_1\partial_2\psi + A_{i3}w \qquad (i = \overline{1, 3}),$$
$$s_6 = A_{66}[2\partial_1\partial_2\varphi + (\partial_2^2 - \partial_1^2)\psi]. \tag{6}$$

Выражения для напряжений σ_5, σ_4 и σ_3 можно также найти, удовлетворяя уравнениям равновесия (4)

$$\sigma_5 = [p_2(h) - p_2(z)]S_5, \qquad \sigma_4 = [p_2(h) - p_2(z)]S_4, \qquad \sigma_3 = [p_3(z) - p_2(h)z]S_3. \tag{7}$$

Здесь введены обозначения, которые с учетом соотношений (5) принимают вид

$$S_5 = \partial_1 s_1 + \partial_2 s_6, \qquad S_4 = \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2, \qquad S_3 = \partial_1 S_5 + \partial_2 S_4. \tag{8}$$

Представления (7) входят в противоречие с соотношениями (5). Корректный результат можно получить для поперечных усилий.

Для построения дифференциальных уравнений, описывающих изгиб плит, полагаем:

1) как и в теории Кирхгофа, поперечное нормальное напряжение σ_3 равно нулю;

2) как и в работе [1], считаем равными поперечные усилия, полученные интегрированием напряжений σ_4 и σ_5, заданных соотношениями (5) и (7).

Реализация указанных предположений приводит к уравнениям, которые для транстропного тела принимают вид

$$s_3 = A_{13}\Delta\varphi + A_{33}w = 0, \qquad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2; \tag{9}$$

$$S_3 = A_{11}\Delta\Delta\varphi + A_{13}\Delta w = 0; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Q_5 &= \int\limits_{-h}^{h} \sigma_5 dz = A_{55}[2h\partial_1 w_0 + I_0(\partial_1\varphi + \partial_2\psi) + I_1\partial_1 w] = I_2 S_5,\\ Q_4 &= \int\limits_{-h}^{h} \sigma_4 dz = A_{55}[2h\partial_2 w_0 + I_0(\partial_2\varphi - \partial_1\psi) + I_1\partial_2 w] = I_2 S_4. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь введены обозначения: $I_0 = \int\limits_{-h}^{h} p_0 dz$, $I_1 = \int\limits_{-h}^{h} p_2 dz$, $I_2 = 2hp_2(h) - I_1$.

Уравнения (9)–(11) для определения функций φ, ψ, w_0 и w приводятся к виду

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\psi - k^2\psi = 0; \tag{12}$$

$$w = -\alpha_{13}\Delta\varphi, \qquad w_0 = -k_0\varphi + \alpha_1\Delta\varphi, \tag{13}$$

где принято

$$k^2 = \frac{k_0 A_{55}}{k_2 A_{66}}, \qquad k_0 = \frac{I_0}{2h}, \qquad k_2 = \frac{I_2}{2h}, \qquad \alpha_1 = \frac{k_2 B_{11}}{A_{55}} + k_1\alpha_{13},$$

$$k_1 = \frac{I_1}{2h}, \qquad \alpha_{13} = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \qquad B_{ik} = A_{ik} - A_{i3}\frac{A_{3k}}{A_{33}} \qquad (i,k = \overline{1,3}).$$

Таким образом, получены дифференциальные уравнения изгиба транстропных плит (12) относительно функций φ и ψ, а также соотношения (13) для вычисления функций w и w_0. Уравнения в совокупности имеют шестой порядок, что позволяет удовлетворить всем трем граничным условиям на боковой поверхности, имеющим место в теории изгиба плит.

Решение дифференциальных уравнений (12). Для построения решения дифференциальных уравнений воспользуемся функциями обобщенных комплексных переменных.

Бигармоническое уравнение. Введем в операторы $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ дополнительные слагаемые так, чтобы они приняли вид $\Delta_1 = (1+\varepsilon)^2\partial_1^2 + \partial_2^2$, $\Delta_2 = (1-\varepsilon)^2\partial_1^2 + \partial_2^2$, где ε — малый параметр [3]. Тогда бигармонический оператор $\Delta\Delta$ превращается в обобщенный бигармонический $\Delta_1\Delta_2$. Корни характеристического уравнения теперь не являются кратными и имеют вид $\mu_1 = (1+\varepsilon)i$, $\mu_2 = (1-\varepsilon)i$, $\overline{\mu}_1 = -(1+\varepsilon)i$, $\overline{\mu}_2 = -(1-\varepsilon)i$.

Общее действительное решение первого уравнения (12) через произвольные функции обобщенных комплексных переменных, согласно [2], можно представить в виде

$$\varphi = 2\mathrm{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)], \qquad z_j = x + \mu_j y. \tag{14}$$

Уравнение Гельмгольца. Рассмотрим способ решения второго уравнения (12) для усложненного оператора $\Delta = \alpha^2\partial_1^2 + \partial_2^2$, где α — вещественное число. Введем обобщенную комплексную переменную $z = x + \mu y$ и сопряженную ей величину $\overline{z} = x + \overline{\mu} y$. В этих переменных второе уравнение системы (12) примет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} - q^2\right]\psi(x,y) = 0, \qquad q^2 = \frac{k^2}{4\alpha^2}. \tag{15}$$

Функцию $\psi(x,y)$ представим в виде произведения функций различных аргументов

$$\psi = \varphi(t)\eta(s), \qquad t = 2qr, \qquad r = (z\overline{z})^{1/2}, \qquad s = \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Подставим представление (16) в уравнение (15). Разделяя функции, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $\varphi(t)$ и $\eta(s)$:

$$t^2\varphi'' + t\varphi' - t^2\varphi = \alpha\varphi, \qquad \eta'' s^2 + \eta' s - \alpha\eta = 0. \tag{17}$$

Решение уравнений (17) при целых значениях разделительного параметра $\alpha = n^2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) дает возможность представить функцию (16) в виде суммы произведений

$$\psi(x,y) = 2\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}[E_n I_n(t) + F_n K_n(t)]s^n, \tag{18}$$

где $I_n(t)$, $K_n(t)$ — модифицированные функции Бесселя [4]; E_n и F_n — произвольные постоянные.

Представления для функций φ и ψ, данные решениями (14) и (18), позволяют удовлетворить всем граничным условиям на боковой поверхности плиты.

Граничные условия на боковой поверхности. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние плиты, ослабленной криволинейной полостью, боковая поверхность которой представляет собой цилиндр с образующими, нормальными плоским граням. Граничные условия для криволинейного края с нормалью $\vec{n}$ определяются способом закрепления и нагружения поверхности. Пусть $P(x,y,z)$ — нормальная, а $T(x,y,z)$ и $N(x,y,z)$ — касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то край считается свободным от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивностью $\sigma_1^0 = pz$, $\sigma_2^0 = qz$ и $\sigma_6^0 = tz$. Полагаем, что внешний контур находится вдали от полости и их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на боковой поверхности полости примут вид

$$\begin{aligned} &n_1\sigma_1 + n_2\sigma_6 = n_1(P - pz) - n_2(T + tz), \\ &n_1\sigma_6 + n_2\sigma_2 = n_1(T - tz) + n_2(P - qz), \\ &n_1\sigma_5 + n_2\sigma_4 = N, \qquad n_1 = \cos(n,x), \qquad n_2 = \cos(n,y). \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим случай, когда внешние усилия представлены в форме

$$P = p_1(z)P_1(x,y), \qquad T = p_1(z)T_1(x,y), \qquad N = [p_2(h) - p_2(z)]N_1(x,y). \tag{20}$$

Тогда, в соответствии с представлениями (5), (7) и (20), условия (19) запишутся так:

$$\begin{aligned} &n_1 s_1 + n_2 s_6 = n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t), \\ &n_1 s_6 + n_2 s_2 = n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q), \qquad n_1 S_5 + n_2 S_4 = N_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Отметим, что при усилиях p, q и t функция $p_1(z) = z$.

Численные исследования. Эллиптический контур. Плита ослаблена полостью в виде цилиндра эллиптического сечения с образующими, нормальными плоским граням. В сечении срединной плоскостью Oxy имеем область Ω в виде плоскости с эллиптическим вырезом. Главные оси эллипса направлены по осям Ox и Oy. В этом случае уравнение эллиптического контура в параметрической форме можно записать таким образом:

$$x = a\cos(\theta) = \frac{a}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right), \qquad y = b\sin(\theta) = -\frac{bi}{2}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right). \tag{22}$$

Здесь $\sigma = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$; a и b — полуоси эллипса; θ — полярный угол.

Уравнение контура (22) позволяет записать функцию, конформно отображающую внешность единичного круга на внешность эллипса в области Ω_j, определения функции $\varphi_j(z_j)$

$$z_j = x + \mu_j y = R_j\varsigma_j + \frac{m_j}{\varsigma_j} \qquad \varsigma_j = r_j\sigma \qquad (r_j \geqslant 1). \tag{23}$$

Функции $\varphi_j'(z_j) = d\varphi_j/dz_j$, представления (14) будем искать в виде ряда

$$\varphi_j'(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nj}}{\varsigma_j^n}. \tag{24}$$

Отметим, что на граничном контуре $r_j = 1$ и имеет место равенство $\varsigma_j = \sigma$.

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (18) и (24) необходимо функции, входящие в граничные условия, разложить в ряды по степеням переменной σ.

При численном исследовании напряженно-деформированного состояния плиты использованы безразмерные величины. Они получаются делением линейных величин на характерный линейный параметр. В качестве такого параметра принята величина $R = \max(a, b)$. Безразмерная координата z_* получается делением исходной координаты z на полутолщину плиты h. Тогда переменная z_* будет изменяться на отрезке $[-1, 1]$.

Деформация осуществляется изгибающими усилиями $\sigma_1^0 = z_*p$, действующими на бесконечности. Наибольший интерес представляют величины, определяющие концентрацию напряжений на контуре полости

$$S_\theta = n_2^2 s_1 - 2n_1n_2s_6 + n_1^2 s_2, \qquad S_{z\theta} = (-n_2S_5 + n_1S_4)p_2(h).$$

В табл. 1 приведены результаты численных исследований для плиты с круговой $a = b$ и эллиптическими $a/b = 2/3$ и $a/b = 3/2$ полостями. Исследования проведены для различных относительных толщин плиты h и различных значений коэффициента Пуассона ν. Для каждого значения параметра ν приведены две строки данных. В верхней строке таблицы отражены максимальные, а в нижней — минимальные значения концентрации напряжений.

Анализ численных исследований и данных табл. 1 позволяет сделать следующие выводы:

1) наибольшая зависимость напряжений от коэффициента Пуассона наблюдается при малых толщинах плиты;

2) напряжения $S_{z\theta}/p$ с увеличением толщины плиты стремятся к нулю;

3) напряжения S_θ/p, возникающие при изгибе плиты с полостью, в зависимости от толщины плиты, лежат в границах между решениями задач изгиба по теории Кирхгофа и решениями соответствующих задач плоской теории упругости.

Действительно, для тонкой плиты из изотропного материала с круговым отверстием путем использования теории Кирхгофа получены соотношения [2]

$$\max\frac{S_\theta}{p}=\frac{5+3\nu}{3+\nu},\qquad \min\frac{S_\theta}{p}=\frac{1-\nu}{3+\nu}. \tag{25}$$

В работе [5] при определении плоского напряженного состояния для пластинки с эллиптическим отверстием получены соотношения, которые для изотропного материала имеют вид

$$\max\frac{S_\theta}{p}=1+2\frac{b}{a},\qquad \min\frac{S_\theta}{p}=-1. \tag{26}$$

Сравнение результатов, полученных по формулам (25) и (26) с данными табл. 1 при $h=0{,}1$ и $h=100$ соответственно, подтверждает сформулированный выше вывод 3.

Также следует отметить, что аналогичные выводы даны в работе [6], где для решения задачи изгиба плиты с круговым вырезом использована теория, учитывающая сдвиговую жесткость.

На рис. 1, 2 показано распределение напряжений по контуру эллиптического отверстия для различных значений относительной толщины плиты h. Параметры эллипса $a=2/3$, $b=1$, относительная толщина плиты h выбиралась равной 0,1, 1 и 10, а коэффициент $\nu=1/3$. Сплошной линией на рисунках обозначен случай, когда $h=10$, штриховая линия соответствует толщине $h=1$, а пунктирная — $h=0{,}1$.

На рис. 3 приведено распределение максимальных значений напряжений $\sigma_\theta=z_*S_\theta$ и $\sigma_{z\theta}=(1-z_*^2)S_{z\theta}$ по толщине плиты для указанных выше случаев. На рисунках наглядно просматриваются закономерности распределения напряжений, описанные выше.

Таким образом, в работе предложена методика получения решений бигармонического и метагармонического уравнений уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных

Таблица 1

h	0,1		1		10		100	
ν	S_θ/p	$S_{z\theta}/p$	S_θ/p	$S_{z\theta}/p$	S_θ/p	$S_{z\theta}/p$	S_θ/p	$S_{z\theta}/p$
$a=b$								
0,001	1,693	−0,574	1,906	0,538	2,734	0,240	2,992	0,030
	0,307	0,574	0,094	−0,538	−0,734	−0,240	−0,992	−0,030
1/3	1,828	0,515	2,049	0,468	2,794	0,186	2,994	0,022
	0,173	−0,515	−0,049	−0,468	−0,794	−0,186	−0,994	−0,022
0,499	1,885	0,489	2,108	0,439	2,814	0,168	2,994	0,020
	0,115	−0,489	−0,108	−0,439	−0,814	−0,168	−0,994	−0,020
$a=2/3b$								
1/3	2,269	0,641	2,712	0,558	3,761	0,194	3,996	0,022
	0,174	−0,641	−0,052	−0,558	−0,830	−0,194	−0,998	−0,022
$a=3/2b$								
1/3	1,550	0,427	1,701	0,372	2,220	0,129	2,330	0,015
	0,154	−0,427	−0,142	−0,372	−0,840	−0,129	−0,996	−0,015

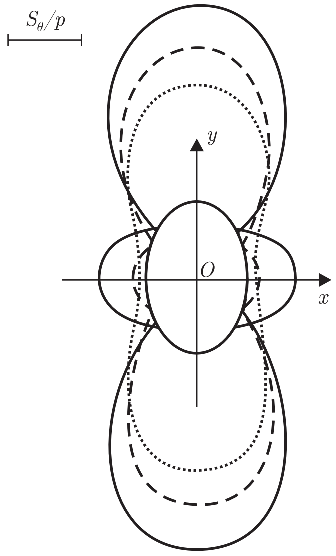

Рис. 1

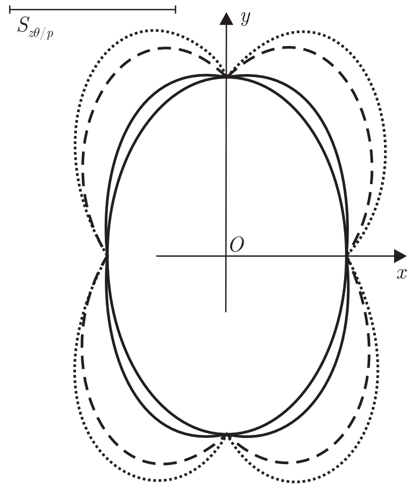

Рис. 2

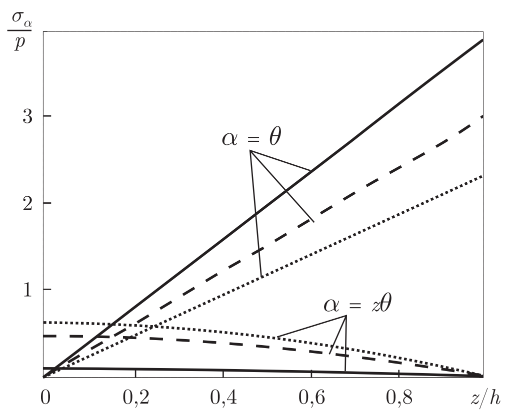

Рис. 3

пластин, учитывающей деформации поперечного сдвига. Методика основана на использовании функций обобщенных комплексных переменных. Проведены численные исследования напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. Дан анализ полученных результатов.

1. *Васильев В. В.* Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. АН. МТТ. – 1998. – № 3. – С. 46–58.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
3. *Космодамианский А. С., Нескородев Н. М.* Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел // Прикл. математика и механика. – 1998. – **62**, вып. 2. – С. 344–346.
4. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. – Москва: Наука, 1978. – 320 с.
5. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев; Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
6. *Пелех Б. Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – Киев: Наук. думка, 1977. – 183 с.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 27.07.2012

Академік НАН України **В. П. Шевченко, Р. М. Нескородєв**

Про один варіант уточненої теорії згину трансверсально-ізотропних плит

Побудовано розв'язок задач згину трансверсально-ізотропних плит, який зводиться до системи диференціальних рівнянь шостого порядку. Запропоновано співвідношення, що дозволяють ставити граничні задачі з довільним заданням зовнішніх зусиль по товщині плити, що істотно розширює коло пропонованих до розв'язання задач.

Academician of the NAS of Ukraine **V. P. Shevchenko, R. N. Neskorodev**

A variant of the improved theory of bending of transversely isotropic plates

The solution of the problem of a bend of transversely isotropic plates, which is reduced to a system of differential equations of the sixth order, is constructed. The relations allowing to pose boundary-value problems with any external forces through the thickness of a plate are proposed. This essentially extends a circle of problems offered to the solution.