Доповіді
національної
академії наук
України

4 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк

Нелокальні за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдобесселевими операторами нескінченного порядку

(Представлено членом-кореспондентом НАН України О. А. Бойчуком)

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь нескінченного порядку у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу розподілів Соболева–Шварца.

На сьогодні предметом багатьох досліджень є псевдодиференціальні оператори (ПДО), які формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a — функція (символ), що задовольняє певні умови, F, F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. Це зумовлено тим, що ПДО та рівняння із псевдодиференціальними операторами (ПДР) тісно пов'язані з важливими задачами аналізу сучасної математичної фізики, теорією ймовірностей, теорією фракталів, квантовою теорією поля. Особливо це стосується ПДО, побудованих за негладкими в точці $\sigma=0$ і однорідними за цим аргументом символами. До класу ПДО природно віднести і оператори вигляду $F_B^{-1}[a(t,x;\sigma)F_B]\equiv A$, породжені перетвореннями Бесселя F_B та F_B^{-1}. Якщо символ a є цілою функцією аргументу σ, то еволюційні рівняння вигляду $\partial u/\partial t+Au=0$ із вказаним оператором містять сингулярні рівняння з оператором Бесселя $B_\nu=d^2/dx^2+(2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu>-1/2$, який має в своїй структурі вираз $1/x$ і формально зображається у вигляді $B_\nu=F_B^{-1}[-\sigma^2F_B]$. Якщо $a(t,x;\sigma)=P(t,x;\sigma)$, де P — поліном змінної σ при фіксованих t, x, що задовольняє певну умову "параболічності", то таке рівняння належить до B-параболічних рівнянь, введених в [1], при цьому $A=P(t,x;B_\nu)$. Такі рівняння вироджуються на межі області й за своїми внутрішніми властивостями близькі до рівномірно параболічних рівнянь.

Еволюційні рівняння з оператором $A=F_B^{-1}[aF_B]$, де $a=a(\sigma)$ — однорідний, негладкий в точці 0 символ, що задовольняє певні умови, почали досліджувати В. В. Городецький та О. М. Ленюк [2]. Такий оператор надалі називатимемо псевдобесселевим. Для подальшого розвитку теорії ПДО та ПДР актуальним є питання про розширення класу еволюційних рівнянь із псевдобесселевими операторами, побудованими за негладкими символами, дослідження ПДР, які містять ПДО скінченного та нескінченного порядків вигляду

$f(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, де $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ — функція (зокрема, поліном), що задовольняє певні умови.

У цій роботі за допомогою символів з нового класу, введеного в [3], досліджуються властивості псевдобесселевих операторів нескінченного порядку $f(A)$, обгрунтовується зображення таких операторів у вигляді $f(A) = F_B[f(a)F_B^{-1}]$.

Для еволюційних рівнянь з операторами $f(A)$ на сьогодні не вивчені нелокальні багатоточкові за часом задачі. Взагалі, теорія нелокальних крайових задач як розділ загальної теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними інтенсивно розвивається з 70-х рр. минулого століття. Дослідження таких задач зумовлене багатьма застосуваннями в механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів [4–8].

Двоточкову за часом задачу для рівняння теплопровідності та B-параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами дослідив М. І. Матійчук [9]. Двоточкова та m-точкова ($m \geqslant 2$) за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдобесселевими операторами, побудованими за негладкими однорідними символами, незалежними від просторових змінних, досліджені в [10, 11]. Такі задачі мають природну постановку і в класах узагальнених функцій скінченного або нескінченного порядків, оскільки граничні функції можуть мати особливості в одній або декількох точках. Якщо ці особливості степеневого порядку, то такі функції допускають регуляризацію в просторах узагальнених функцій скінченного порядку типу розподілів Соболєва–Шварца. Якщо ж порядок особливостей вищий за степеневий, то ці функції є узагальненими функціями нескінченного порядку (наприклад, ультрарозподілами, гіперфункціями). У даній роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальної m-точкової ($m \geqslant 1$) за часом задачі для рівняння $\partial u/\partial t + f(A)u = 0$ у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу розподілів Соболєва–Шварца.

1. Простори основних та узагальнених функцій. Нехай M, ρ: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$ — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, диференційовні, монотонно зростаючі на $(0,\infty)$, $M(0) = \rho(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = +\infty$, причому функція ρ опукла на $[0,+\infty)$, тобто:

а) $\forall \{x_1, x_2\} \subset [0,+\infty)$: $\rho(x_1) + \rho(x_2) \leqslant \rho(x_1 + x_2)$;

б) $\forall \alpha \geqslant 1\ \forall x \in [0,+\infty)$: $\rho(\alpha x) \geqslant \alpha\rho(x)$;

в) $\forall \alpha \in (0,1)\ \forall x \in [0,\infty)$: $\rho(\alpha x) \leqslant \alpha\rho(x)$.

Припускаємо також, що виконуються такі умови:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x_0 = x_0(\varepsilon) > 0\ \ \forall x \geqslant x_0: \quad \rho(\varepsilon x) \geqslant M(x),$$

$$\rho(x) \underset{x\to+0}{\sim} x^{\gamma}, \qquad \gamma \in (1,+\infty), \qquad M(x) \underset{x\to+0}{\sim} x^{\beta}, \qquad \beta \in (0,1],$$

де γ та β — фіксовані параметри.

Символом $\theta_{M,\rho}$ позначимо сукупність усіх неперервних, парних на $\mathbb{R}$ функцій φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, для яких

$$\begin{gathered} \exists a_0 > 0\ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \ \exists c_k > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \\ M^k(x)|D_x^k \varphi(x)| \leqslant c_k \sum_{l=1}^{k} \rho^l(x) e^{-\rho(a_0 x)} \end{gathered} \tag{1}$$

(якщо $k = 0$, то сума відсутня, якщо $k = 1$, то $l = 1$ і т. д.; якщо $k = 0$, то (1) справджується для всіх $x \in \mathbb{R}$; сталі c_k, $a_0 > 0$ залежать від функції φ).

Наведемо приклад функції з простору $\theta_{M,\rho}$, побудованого за конкретними функціями M, ρ. Для цього розглянемо функцію α: $\mathbb{R} \to [0, \infty)$, яка використовується при побудові псевдодиференціальних операторів: α — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma > 1$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, похідні цієї функції задовольняють умову

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \exists\, b_k > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad |D_x^k \alpha(x)| \leqslant b_k |x|^{\gamma - k}, \tag{2}$$

крім того, $\exists\, b_0 > 0\; \forall\, x \in \mathbb{R}$: $\alpha(x) \geqslant b_0 |x|^\gamma$. Умову (2) можна подати у вигляді

$$M^k(x) |D_x^k \alpha(x)| \leqslant b_k \rho(x), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

де $M(x) = |x|$, $\rho(x) = |x|^\gamma$. Тоді (див. [3]) функція $\exp\{-\alpha(x)\}$ є елементом простору $\theta_{M,\rho}$ із вказаними функціями M і ρ (така функція використовується при дослідженні задачі Коші для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, для яких функція α є негладким у точці 0 однорідним символом).

Відзначимо основні властивості функцій з простору $\theta_{M,\rho}$, встановлені в [3]: у функції $D_x^k \varphi$, $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x \to \pm 0} D_x^k \varphi(x)$, функція $D_x^{2k} \varphi$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, у точці $x = 0$ має усувний розрив, кожна функція $\varphi \in \theta_{M,\rho}$ у точці 0 задовольняє умову Діні. Про топологічну структуру простору $\theta_{M,\rho}$ див. [3].

Нехай ν — фіксоване число з множини $\{3/2; 5/2; 7/2; \ldots\}$. На функціях з простору $\theta_{M,\rho}$ визначене перетворення Бесселя $F_{B_\nu} \equiv F_B$:

$$F_B[\varphi](\xi) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx, \qquad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя. Нехай $F_{B_\nu}[\theta_{M,\rho}] := \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Елементами простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, що задовольняють нерівності (див. [12]):

$$|D_\xi^m F_B[\varphi](\xi)| \leqslant \alpha_m (1 + |\xi|)^{-(\omega_0 + m)}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

$\omega_0 = \widetilde{p}_0 + [\beta^{-1}[\gamma]]$, $\widetilde{p}_0 = 1 + p_0$, $p_0 = 2\nu + 1$, $[\cdot]$ — ціла частина числа.

$\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ перетворюється в зліченно-нормований простір, якщо систему норм у ньому ввести за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in [0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^p \Lambda(\xi)^{\widetilde{\omega}_0 + 2k} |D_\xi^{2k} \varphi(\xi)| \right\}, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}, \qquad p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\Lambda(\xi) := 1 + \xi$, $\xi \in [0, \infty)$, $\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ — фіксований параметр. Перетворення Бесселя неперервно відображає $\theta_{M,\rho}$ на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ [12]; на функціях із простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначене обернене перетворення Бесселя $F^{-1}_{B_\nu} \equiv F^{-1}_B$:

$$F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \qquad \psi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}, \qquad c_\nu = (2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1))^{-1}.$$

У просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначений і є неперервним оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, який відповідає оператору Бесселя [13]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos\omega}\right) \sin^{2\nu} \omega d\omega, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi \varphi$ диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ у тому розумінні, що граничні співвідношення $(\Delta\xi)^{-1}(T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x) - T_x^\xi\varphi(x)) \to \partial T_x^\xi\varphi/\partial\xi$, $\Delta\xi \to 0$, справджуються в просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

Символом $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки в просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ з основною задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi\varphi(x)\rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x\varphi(\xi)\rangle, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma},$$

при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією (індекс ξ в f_ξ означає, що функціонал f діє на $T_x^\xi\varphi(x)$ як функцію аргументу ξ).

Нехай $f \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$. Якщо $f * \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, $\forall\, \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Надалі сукупність усіх таких згортувачів позначатимемо символом $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma,*})'$.

Оскільки $F_B[\varphi] \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, якщо $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ визначимо за допомогою співвідношення $\langle F_B[f], \varphi\rangle = \langle f, F_B[\varphi]\rangle$, $\varphi \in \theta_{M,\rho}$. Звідси, з властивостей лінійності і неперервності функціонала f та перетворення Бесселя випливає лінійність і неперервність функціонала $F_B[f]$, заданого на $\theta_{M,\rho}$.

2. Псевдобесселеві оператори нескінченного порядку. Нехай M, ρ: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$ — функції, розглянуті в п. 1, $\gamma \in (1,+\infty) \setminus \{2,3,4,\ldots\}$ — фіксоване число, a: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку γ, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, похідні якої задовольняють умову

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \exists\, b'_k > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad M^k(x)|D_x^k a(x)| \leqslant b'_k \rho(x),$$

причому

$$\exists\, c_0 > 0 \;\; \exists\, \widetilde{c}_0 > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}: \quad c_0\rho(x) \leqslant a(x) \leqslant \widetilde{c}_0(1+\rho(x)).$$

Безпосередньо переконуємося в тому, що функція a — мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$. У зв'язку з цим розглянемо оператор A: $\Phi^\nu_{\beta,\gamma} \to \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, який задамо формулою $A\varphi = F_B[aF_B^{-1}[\varphi]]$, $\forall\, \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Із властивостей перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність оператора A.

Говоритимемо, що в просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ задано псевдобесселевий оператор нескінченного порядку $f(A) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k A^k$, де $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ ряд $(f(A)\varphi)(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k (A^k\varphi)(x)$ зображає деяку основну функцію з простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Виділимо тут класи функцій, за допомогою яких можна будувати оператори вказаного вигляду. Нехай функція $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

(a) $\exists\, d_0 > 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geqslant d_0|x|$;

(б) $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists\, p_k \in \mathbb{N} \ \exists\, \widetilde{b}_k > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$: $|D_x^k f(x)| \leqslant \widetilde{b}_k (1+|x|)^{p_k}$;

(в) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, c_\varepsilon > 0 \ \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}$: $|f(z)| \leqslant c_\varepsilon (1+|x|)^{p_0} e^{\rho(\varepsilon y)}$
(тут p_0 — стала з умови (б)).

Зазначимо, що з умови (б) випливає той факт, що функція f — мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$.

Теорема 1. *Якщо функція f задовольняє умови (б), (в), то в просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначений і є неперервним оператор $f(A) \equiv A_f$, при цьому $A_f\varphi = F_B[f(a)F_B^{-1}[\varphi]]$, $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.*

3. Нелокальні за часом багатоточкові задачі. Нехай $p \in \mathbb{N}$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^p \subset (1,+\infty)\setminus \{2,3,4,\ldots\}$ — фіксовані числа, причому $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_p$; M, ρ_i, a_{γ_i}: $\mathbb{R} \to [0,\infty)$, $i \in \{1,\ldots,p\}$, — функції, які задовольняють умови, сформульовані в п. п. 1, 2; $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$, — функція, розглянута в п. 2, $A_{f,i} \equiv A_i$, $i \in \{1,\ldots,p\}$, — псевдобесселевий оператор нескінченного порядку, побудований за функціями f та a_{γ_i}.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} A_i u = 0, \qquad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{3}$$

розглянемо багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \tag{4}$$

де $T \in (0,\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$ — фіксовані числа, причому $\mu > \max\left\{\sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k, \mu_0 2^m\right\}$, $\mu_0 = \max\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leqslant T$, $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. За допомогою методу перетворення Бесселя знаходимо, що класичний розв'язок $u(t,\cdot) \in C^1((0,T],\Phi^\nu_{\beta,\gamma})$ задачі (3), (4) подається у вигляді згортки:

$$u(t,x) = \Gamma(t,x) * \varphi(x) \equiv \int_0^\infty T_x^\xi \Gamma(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \qquad (t,x) \in \Omega,$$

де $\Gamma(t,x) = F_B[Q(t,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\sigma) = \exp\left\{-t\sum_{i=1}^{p} f(a_i(\sigma))\right\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\left\{-t_k \sum_{i=1}^{p} f(a_i(\sigma))\right\}\right)^{-1}.$$

Основні властивості функції Γ наведемо у вигляді таких тверджень.

Лема 1. *1. При кожному $t \in (0,T]$ функція Γ, як функція аргументу x, є елементом простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma_1}$, при цьому справджуються оцінки*

$$|D_x^s \Gamma(t,x)| \leqslant c_s \sum_{r=0}^{\infty} \widetilde{\mu}^r (t+r)^{[\beta^{-1}[\gamma_1]]/\gamma_p - \delta(s)} ((t+rt_1)^{1/\gamma_1} + |x|)^{-(\omega_0+s)},$$

$$s \in \mathbb{Z}_+, \qquad (t,x) \in \Omega,$$

де $\widetilde{\mu} = \mu_0 2^m \mu^{-1} < 1$, $\delta(s) = \widetilde{p}_s(\nu + 3/2 + [\beta^{-1}[\gamma_1]] + s)$, $\widetilde{p}_s = \max\{p_0, p_1, \ldots, p_s\}$ *(*p_0, p_1, $\ldots$, p_s *— сталі з умови (б), яку задовольняє функція* f*), стала* $c_s > 0$ *не залежить від* t.

2. Функція $\Gamma(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$, *диференційовна за* t.

3. Функція Γ *є розв'язком рівняння* (3).

Оскільки $\Gamma(t, \cdot) \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ при кожному $t \in (0, T]$, то для довільного $\varphi \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$ існує згортка $\varphi * \Gamma(t, \cdot)$ (див. п. 1).

Лема 2. *У просторі* $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$ *справджуються граничні співвідношення:*

а) $\Gamma(t, \cdot) \to \left(\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k\right)\delta$, $t \to +0$;

б) $\mu \lim\limits_{t \to +0} \Gamma(t, \cdot) - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \lim\limits_{t \to t_k} \Gamma(t, \cdot) = \delta$ *(тут* δ *— дельта-функція Дірака);*

в) $\mu \lim\limits_{t \to +0} \omega(t, \cdot) - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \lim\limits_{t \to t_k} \omega(t, \cdot) = \varphi$, *де* $\omega(t, \cdot) = \varphi * \Gamma(t, \cdot)$, $\varphi \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$, $(t, x) \in \Omega$.

З леми 2 випливає, що нелокальну за часом m-точкову граничну умову (4) для рівняння (3) можна ставити і у випадку, коли φ — узагальнена функція з простору $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$, при цьому під розв'язком m-точкової задачі (3), (4) розумітимемо розв'язок рівняння (3), який задовольняє умову (4) з $\varphi \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$ у сенсі узагальнених функцій, тобто

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t, \cdot) = \varphi,$$

де границі розглядаються в просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1})'$. Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *m-точкова задача* (3), (4) *з граничною функцією* $\varphi \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1,*})'$ *є коректно розв'язною; розв'язок дається формулою*

$$u(t, x) = \varphi * \Gamma(t, x), \qquad (t, x) \in \Omega;$$

при цьому $u(t, \cdot) \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma_1}$ *при кожному* $t \in (0, T]$.

Зауваження. Функцію $\Gamma(t, x)$, яка має вказані властивості, називають фундаментальним розв'язком багатоточкової задачі (3), (4).

1. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР. – 1968. – **181**, № 6. – С. 1320–1323.
2. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11–15.
3. *Мартинюк О. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: Зб. наук. праць. – 2011. – Вип. 5. – С. 179–192.
4. *Шелухин В. В.* Нелокальная по времени задача для уравнений динамики баротропного океана // Сиб. мат. журн. – 1995. – **36**, № 3. – С. 701–724.
5. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – Москва: Высш. шк., 1995. – 301 с.
6. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.
7. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. – **38**, № 6. – С. 885–902.

8. *Майков А. Р., Поезд А. Д., Якунин С. А.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем // Там же. – 1990. – **30**, № 8. – С. 1267–1271.
9. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
10. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Двоточкова задача для одного класу еволюційних рівнянь // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 175–182.
11. *Городецький В. В., Спіжавка Д. І.* Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 7–12.
12. *Мартинюк О. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. II // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: Зб. наук. праць. – 2012. – Вип. 6. – С. 157–171.
13. *Левитан Б. И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 2. – С. 102–143.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 13.09.2012

В. В. Городецкий, О. В. Мартынюк

Нелокальные по времени задачи для эволюционных уравнений с псевдобесселевыми операторами бесконечного порядка

Установлена корректная разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для одного класса эволюционных псевдодифференциальных уравнений бесконечного порядка в случае, когда предельная функция есть обобщенной функцией типа распределений Соболева–Шварца.

V. V. Gorodetsky, O. V. Martynyuk

Problems nonlocal in time for evolution equations with pseudo-Bessel infinite-order operators

We have established the correct solvability of a multipoint problem nonlocal in time for a class of evolution pseudodifferential equations of infinite order when the limiting function is a generic function of distributions of the Sobolev–Schwartz type.