УДК 517+519.2

**М. В. Миронюк**

# Теорема Хейде на a-адических соленоидах

*(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)*

*Согласно теореме Хейде, гауссовское распределение на действительной прямой характеризуется симметрией условного распределения одной линейной формы от независимых случайных величин при фиксированной другой. Рассмотрен аналог теоремы Хейде для* **a***-адических соленоидов.*

Одна из наиболее известных теорем математической статистики теорема Скитовича–Дармуа утверждает, что гауссовское распределение на вещественной прямой характеризуется независимостью линейных форм от независимых случайных величин [1, 2] (см. также [3, § 13.1]). Хейде доказал близкий результат, где вместо независимости линейных форм предполагалось, что условное распределение одной линейной формы при фиксированной второй симметрично.

**Теорема Хейде** [4] (см. также [3, § 13.4.1]). *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \geqslant 2$, — независимые случайные величины, $\alpha_j$, $\beta_j$ — ненулевые константы такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \neq 0$ при всех $i \neq j$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то все случайные величины $\xi_j$ — гауссовские.*

В работах [5, 6] были доказаны аналоги теоремы Хейде для конечных абелевых групп, а в работах [7, 8] — для дискретных абелевых групп. В работе [9] теорема Хейде изучалась для произвольных локально компактных абелевых групп в случае, когда характеристические функции рассматриваемых распределений не обращаются в нуль. В [10] была сформулирована задача обобщения теоремы Хейде на **a**-адические соленоиды. В настоящей работе мы решаем эту задачу.

Прежде чем формулировать результаты работы, напомним некоторые определения и условимся об обозначениях. Пусть $X$ — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов $X$. Пусть $Y = X^*$ — группа характеров группы $X$. Если $\delta\colon X \mapsto X$ — непрерывный гомоморфизм, то сопряженный гомоморфизм $\widetilde{\delta}\colon Y \mapsto Y$ определяется по формуле $(x, \widetilde{\delta}y) = (\delta x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Отметим, что $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\delta} \in \mathrm{Aut}(Y)$. Если $n$ — целое, $n \neq 0$, то через $f_n$ обозначим гомоморфизм $f_n\colon X \mapsto X$, определяемый формулой $f_n(x) = nx$. Обозначим через $\mathbb{R}$ — группу вещественных чисел, через $\mathbb{Z}$ — группу целых чисел, через $\mathbb{Q}$ — рассматриваемую в дискретной топологии группу рациональных чисел, через $\mathbb{Z}(n)$ — конечную циклическую группу порядка $n$. Обозначим через $\mathbb{Z}(p^\infty)$ рассматриваемую в дискретной топологии группу корней степени $p^n$ из единицы, где $n$ принимает все неотрицательные целые значения (эту группу мы отождествляем с группой вычетов по модулю 1 группы $p$-ично рациональных чисел).

Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$, где все $a_j \in \mathbb{Z}$, $a_j > 1$. Напомним определение группы целых **a**-адических чисел $\Delta_\mathbf{a}$. Как множество, $\Delta_\mathbf{a}$ совпадает с декартовым произведением $\mathop{\mathbf{P}}\limits_{n=0}^{\infty}\{0, 1, \ldots, a_n - 1\}$. Рассмотрим $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots) \in \Delta_\mathbf{a}$, и определим сумму $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ следующим образом. Пусть $x_0 + y_0 = t_0a_0 + z_0$, где $z_0 \in \{0, 1, \ldots, a_0 - 1\}$, $t_0 \in \{0, 1\}$. Предположим, что числа $z_0, z_1, \ldots, z_k; t_0, t_1, \ldots, t_k$ уже определены. Положим тогда $x_{k+1}+y_{k+1}+t_k = t_{k+1}a_{k+1}+z_{k+1}$, где $z_{k+1} \in \{0, 1, \ldots, a_{k+1}-1\}$, $t_{k+1} \in \{0, 1\}$. Таким образом по индукции определена последовательность $\mathbf{z} = (z_0, z_1, z_2, \ldots)$. Множество $\Delta_{\mathbf{a}}$ с определенным выше сложением является абелевой группой, нейтральный элемент которой — последовательность в $\Delta_{\mathbf{a}}$, состоящая из нулей. Рассмотрим $\Delta_{\mathbf{a}}$ в топологии произведения. Полученная группа называется группой целых $\mathbf{a}$-адических чисел. Если $\mathbf{a} = (p, p, \ldots, p, \ldots)$, где $p$ — простое число, то соответствующая группа называется группой $p$-адических целых чисел и обозначается через $\Delta_p$. Отметим, что $\Delta_p^* \approx \mathbb{Z}(p^\infty)$ (см. [11, § 25.2]).

Рассмотрим группу $\mathbb{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$. Пусть $B$ — подгруппа в $\mathbb{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$ вида $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\mathbf{u} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Фактор-группа $\Sigma_{\mathbf{a}} = (\mathbb{R} \times \Delta_{\mathbf{a}})/B$ называется $\mathbf{a}$-*адическим соленоидом.* Группа $\Sigma_{\mathbf{a}}$ компактна, связна и имеет размерность один [11, 10.12, 10.13, 24.28]. Группа характеров группы $\Sigma_{\mathbf{a}}$ топологически изоморфна подгруппе $H_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{Q}$ вида

$$H_{\mathbf{a}} = \left\{\frac{m}{a_0a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \ldots ;\ m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что если $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, то $Y = X^* = H_{\mathbf{a}}$.

Пусть $\widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y)\, d\mu(x)$ — характеристическая функция распределения $\mu$ на $X$.

Распределение $\gamma \in \mathcal{M}^1(X)$ называется гауссовским [12, § 4.6], если его характеристическая функция представима в виде

$$\widehat{\gamma}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\},$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на $Y$, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(u + v) + \varphi(u - v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)], \qquad u, v \in Y.$$

Отметим, что если $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, то $\varphi(y) = \lambda y^2$, где $\lambda \geqslant 0$, $y \in Y = H_{\mathbf{a}}$.

Заметим, что носитель гауссовского распределения на произвольной локально компактной абелевой группе $X$ — это класс смежности некоторой связной подгруппы группы $X$. Тогда если $\gamma$ — невырожденное гауссовское распределение на группе $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, то $\sigma(\gamma) = X$. Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на $X$.

Обозначим через $I(X)$ множество идемпотентных распределений на $X$, т. е. множество сдвигов распределений Хаара $m_K$ компактных подгрупп $K$ группы $X$. Отметим, что если распределение $\mu \in \Gamma(X)*I(X)$, т. е. $\mu = \gamma*m_K$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, то $\mu$ инвариантно относительно компактной подгруппы $K \subset X$ и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ $\mu$ индуцирует на фактор-группе $X/K$ гауссовское распределение.

Пусть $\xi_1, \xi_2$ — независимые случайные величины со значениями в группе $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$. Рассмотрим линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$, где $\alpha_j$, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2$ при фиксированной $L_1$ симметрично. Изучая возможные распределения $\mu_j$ на $X$, можно считать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2$, где $\delta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\delta_1 \pm \delta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$. Действительно, вводя новые независимые случайные величины $\xi'_j = \alpha_j\xi_j$, $j = 1, 2$, мы сводим задачу к такому виду форм. Заметим, что любой топологический автоморфизм $\delta$ группы $X$ имеет вид

$$\delta = f_pf_q^{-1}$$

при некоторых взаимно простых $p$ и $q$, где $f_p, f_q \in \mathrm{Aut}(X)$. Поскольку при любом $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ условное распределение линейной формы $L_2$ при фиксированной $L_1$ симметрично тогда и только тогда, когда условное распределение линейной формы $\delta L_2$ при фиксированной $L_1$ симметрично, то, не ограничивая общности, можно с самого начала предполагать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = p\xi_1 + q\xi_2$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, $pq \neq 0$, $p$ и $q$ — взаимно просты, $f_p, f_q, f_{p\pm q} \in \mathrm{Aut}(X)$. Сформулируем теперь основной результат работы.

**Теорема 1.** *Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$. Предположим, что $f_p$, $f_q$, $f_{p\pm q} \in \mathrm{Aut}(X)$, $p$ и $q$ взаимно просты. Имеют место следующие утверждения:*

*1. Пусть $pq = -3$. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — независимые случайные величины со значениями в группе $X$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$. Если условное распределение линейной формы $L_2 = p\xi_1 + q\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, то по крайней мере одно из распределений $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$.*

*2. Пусть $pq \neq -3$. Тогда существуют независимые случайные величины $\xi_1$, $\xi_2$ со значениями в группе $X$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$ такими, что условное распределение линейной формы $L_2 = p\xi_1 + q\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а распределения $\mu_j \notin \Gamma(X) * I(X)$, $j = 1, 2$.*

Теорему 1 можно рассматривать как групповой аналог теоремы Хейде для **a**-адических соленоидов. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится несколько утверждений.

**Лемма 1.** *Пусть $X$ — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — независимые случайные величины со значениями в группе $X$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$. Рассмотрим линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$, где $\alpha_j$, $\beta_j$ — непрерывные гомоморфизмы группы $X$. Условное распределение линейной формы $L_2$ при фиксированной $L_1$ симметрично тогда и только тогда, когда характеристические функции распределений $\mu_j$ удовлетворяют уравнению*

$$\widehat{\mu}_1(\widetilde{\alpha_1}u + \widetilde{\beta}_1 v)\widehat{\mu}_2(\widetilde{\alpha_2}u + \widetilde{\beta}_2 v) = \widehat{\mu}_1(\widetilde{\alpha_1}u - \widetilde{\beta}_1 v)\widehat{\mu}_2(\widetilde{\alpha_2}u - \widetilde{\beta}_2 v), \qquad u, v \in Y.$$

Лемма 1 доказана в [10, 16.1] в случае, когда $\alpha_j$, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Приведенное в [10, 16.1] доказательство справедливо для произвольных непрерывных гомоморфизмов $\alpha_j$, $\beta_j$ группы $X$.

**Лемма 2.** *Пусть либо $|q| = 2$, либо $q = 4m + 3$, где $m$ — некоторое целое число. Пусть $X = \Delta_2$. Тогда существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1$, $\xi_2$ со значениями в группе $X$ и с распределением $\mu$ такие, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + q\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а распределение $\mu \notin I(X)$.*

**Лемма 3.** *Пусть $q = 4m + 1$, где $m \notin \{0, -1\}$. Пусть $|2m + 1| = p_1^{l_1} \times \cdots \times p_k^{l_k}$ — разложение числа $|2m + 1|$ на простые множители. Пусть $X = \Delta_{p_1} \times \cdots \times \Delta_{p_k}$. Тогда существуют независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1$, $\xi_2$ со значениями в группе $X$ и с распределением $\mu$ такие, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + q\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а распределение $\mu \notin I(X)$.*

**Лемма 4.** *Пусть $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$. Если $f_n \in \mathrm{Aut}(X)$, где $n = p_1^{l_1} \times \cdots \times p_k^{l_k}$ — разложение числа $n$ на простые множители, то группа $X$ содержит подгруппу, топологически изоморфную $\Delta_{p_1} \times \cdots \times \Delta_{p_k}$.*

**Лемма 5.** *Пусть $X$ — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $\delta_1$, $\delta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — независимые случайные величины со значениями в группе $X$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$. Линейные формы $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2$*

*независимы тогда и только тогда, когда характеристические функции распределений $\mu_j$ удовлетворяют уравнению*

$$\widehat{\mu}_1(u+\widetilde{\delta}_1 v)\widehat{\mu}_2(u+\widetilde{\delta}_2 v)=\widehat{\mu}_1(u)\widehat{\mu}_1(\widetilde{\delta}_1 v)\widehat{\mu}_2(u)\widehat{\mu}_2(\widetilde{\delta}_2 v), \qquad u,v\in Y.$$

Лемма 5 доказана в [10, 10.1] в случае, когда $\alpha_j$, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Приведенное в [10, 10.1] доказательство справедливо для произвольных непрерывных гомоморфизмов $\alpha_j$, $\beta_j$ группы $X$.

**Лемма 6.** *Пусть $X$ — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $\delta_1$, $\delta_2$ — непрерывные гомоморфизмы группы $X$. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — независимые случайные величины со значениями в группе $X$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$. Тогда если условное распределение линейной формы $L_2=\delta_1\xi_1+\delta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ симметрично, то линейные формы $L'_1=(\delta_1+\delta_2)\xi_1+2\delta_2\xi_2$ и $L'_2=2\delta_1\xi_1+(\delta_1+\delta_2)\xi_2$ независимы.*

*Замечание 1.* Из леммы 6 следует, что теорема Хейде на группе $\mathbb{R}$ при $n=2$ может быть получена из теоремы Скитовича–Дармуа.

*Замечание 2.* Утверждение 1 теоремы 1 не может быть усилено до утверждения, что оба распределения $\mu_j\in\Gamma(X)*I(X)$. Другими словами, при $pq=-3$ существуют независимые случайные величины $\xi_1$, $\xi_2$ со значениями в группе $X$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$ такими, что условное распределение линейной формы $L_2=p\xi_1+q\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ симметрично, и одно из распределений $\mu_j\notin\Gamma(X)*I(X)$.

*Замечание 3.* Заметим, что в теореме 1 мы предполагаем, что на группе $X=\Sigma_{\mathbf{a}}$ при некоторых взаимно простых $p$ и $q$ существуют автоморфизмы $f_p$ и $f_q$ такие, что $f_{p\pm q}\in \in\mathrm{Aut}(X)$. Группы $X=\Sigma_{\mathbf{a}}$, обладающие этим свойством, нетрудно описать. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $f_2$, $f_3\in\mathrm{Aut}(X)$.

*Замечание 4.* Отметим, что если в теореме 1 распределения $\mu_1$, $\mu_2$ такие, что их характеристические функции не обращаются в нуль, то $\mu_1$, $\mu_2\in\Gamma(X)$. Действительно, из условий на коэффициенты форм следует, что одно из чисел $p$, $q$, $p\pm q$ четно. Значит, $f_2\in\mathrm{Aut}(X)$. Следовательно, группа $X=\Sigma_{\mathbf{a}}$ не содержит элементом порядка 2. Искомое утверждение вытекает теперь из следующей теоремы, доказанной в [9]. Пусть $X$ — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — независимые случайные величины со значениями в группе $X$ и с распределениями $\mu_1$, $\mu_2$. Рассмотрим линейные формы $L_1=\xi_1+\xi_2$ и $L_2=\delta_1\xi_1+\delta_2\xi_2$, где $\delta_j$, $\delta_1\pm\delta_2\in\mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение линейной формы $L_2$ при фиксированной $L_1$ симметрично, то распределения $\mu_1$, $\mu_2\in\Gamma(X)$.

*Работа выполнена при поддержке украинско-французской программы DNIPRO 2013–2014 "Вероятностные задачи в спектральной теории и на группах".*

1. *Darmois G.* Analyse generale des liaisons stochastiques // Rev. Inst. Intern. Stat. – 1953. – **21**. – P. 2–8.
2. *Скитович В. П.* Об одном свойстве нормального распределения // Докл. АН СССР. – 1953. – **89**, № 2. – С. 217–219.
3. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – Москва: Наука, 1972. – 656 с.
4. *Heyde C. C.* Characterization of the normal law by the symmetry of a certain conditional distribution // Sankhya. Ser. A. – 1970. – **32**. – P. 115–118.
5. *Feldman G. M.* On the Heyde theorem for finite Abelian groups // J. Theoret. Probab. – 2004. – **17**. P. 929–941.
6. *Миронюк М. В., Фельдман Г. М.* Об одной характеризационной теореме на конечных абелевых группах // Сиб. мат. журн. – 2005. – **46**, № 2. – С. 403–415.

7. *Feldman G. M.* On the Heyde theorem for discrete Abelian groups // Studia Math. – 2006. – **177**, No 1. – P. 67–79.
8. *Myronyuk M. V.* Heyde's characterization theorem for discrete Abelian groups // J. Austral. Math. S. – 2010. – **88**. – P. 93–102.
9. *Feldman G. M.* On a characterization theorem for locally compact Abelian groups // Probab. Theory Relat. Fields. – 2005. – **133**. – P. 345–357.
10. *Feldman G. M.* Functional equations and characterization problems on locally compact Abelian groups. EMS Tracts in Mathematics. Vol. 5. – Zürich: European Math. Society, 2008. – 256 p.
11. *Hewitt E., Ross K. A.* Abstract harmonic analysis. Vol. 1. – Berlin; Göttingen; Heildelberg: Springer, 1963. – 540 p.
12. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. – New York; London: Academic Press, 1967. – 276 p.

*Физико-технический институт*
*низких температур им. Б. И. Веркина*
*НАН Украины, Харьков*

*Поступило в редакцию 15.10.2012*

**М. В. Миронюк**

## Теорема Хейде на a-адичних соленоїдах

*Згідно з теоремою Хейде, гауссів розподіл на дійсній прямій характеризується симетрією умовного розподілу однієї лінійної форми від незалежних випадкових величин при фіксованій іншій. Розглянуто аналог теореми Хейде для* **a***-адичних соленоїдів.*

**M. V. Myronyuk**

## The Heyde theorem on a-adic solenoids

*According to the Heyde theorem, the Gaussian distribution on a real line is characterized by the symmetry of a conditional distribution of one linear form of independent random variables given another one. An analog of the Heyde theorem on* **a***-adic solenoids is considered.*