УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Математическое моделирование одного класса сложных систем с применением нечеткой логики

Строится трехмерная математическая модель кристаллизации металла с учетом конвективного теплообмена. При управлении этим процессом используется нечеткая логика. Методом Ритца строятся приближенные решения, сходящиеся к точному решению в W_2^1 и C.

1. Рассмотрим область $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3 \colon r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2)\}$ и через Γ^- и Γ^+ обозначим следующие сферы:

$$\Gamma^- = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}, \qquad \Gamma^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Пусть Γ_0— гладкая связная поверхность без самопересечений, лежащая внутри Ω, которая разбивает ее на две подобласти Ω^+ и Ω^-, т.е. $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, причем сфера Γ^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Рассмотрим краевую задачу со свободной границей Γ_0. Требуется определить тройку $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u^\pm(x) = 0, \qquad x \in \Omega^\pm; \qquad u^\pm(x)|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x);\\ &u^\pm(x) = 1, \qquad |\nabla u^-(x)| - |\nabla u^+(x)| = 0, \qquad x \in \Gamma_0. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом $B^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\Gamma^\pm)$, $u^\pm(x) \in C^{3+\alpha}(\overline{\Omega^\pm})$, а Γ_0 принадлежит классу C^∞ [1].

Затем введем в рассмотрение функцию $u(x)$, заданную следующим образом: $u = u^-(x)$ при $x \in \overline{\Omega^-}$ и $u = u^+(x)$ при $x \in \overline{\Omega^+}$. Тогда функцию $u(x)$ можно найти из условия минимума функционала $I(u, \Gamma_0) = \iint\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx_1 dx_2 dx_3$ на соответствующем множестве R допустимых функций [2]. Это следует из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования [2].

Далее, удобно представить функционал I в сферических координатах:

$$I(u, \Gamma_0) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_r^{R} \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} u_\varphi^2\right) \rho^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть тройка* $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ *является классическим решением задачи* (1). *Тогда эта тройка будет стационарной для функционала* (2) *на множестве* R. *Обратно, каждая стационарная тройка* $(u^\pm(x),\ \Gamma_0)$ *функционала* (2) *на множестве* R, *где* Γ_0 *— достаточно гладкая связная поверхность, является решением задачи* (1).

Сформулированная задача (1) получается из задачи, изученной в [1] в случае $\overrightarrow{V} = 0$, т. е. в случае бесконечно большой вязкости, $\mathrm{Re} = 0$. Поэтому в дальнейшем под решением задачи (1) при $\mathrm{Re} = 0$ будем понимать функции $\overrightarrow{V}(x) = 0$, $u^+(x)$ и $u^-(x)$, заданные в $\Omega^\pm$. Из условий (1) следует, что Γ_0 — ни что иное, как линия уровня функции $u(x)$, т. е:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega \colon u(x) = 1\}.$$

Если предположить выполнение условия

$$\pm(B^\pm(x) - 1) \geqslant \varepsilon_0 > 0, \qquad x \in \Gamma^\pm,$$

где ε_0 — некоторая постоянная, тогда поверхность Γ_0 лежит внутри области Ω и представляет собой поверхность класса $C^{4+\alpha}$, не имеющую самопересечений и располагающуюся относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ_t (свободная поверхность), изученной в [1]. Следовательно, рассматривая функцию $u(x)$ в одной из областей $\Omega^\pm$ и принимая во внимание лемму о нормальной производной, находим, что

$$\frac{\partial u}{\partial n} = |\nabla u| \geqslant \varepsilon > 0, \qquad x \in \Gamma_0,$$

где n — нормаль к Γ_0, направленная в сторону Ω_0^+, а ε — некоторая постоянная. Отсюда, применяя теорему о неявной функции, следует, что Γ_0 принадлежит классу C^∞, так как этому классу в некоторой окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $u(x)$.

2. Минимум функционала (2) на множестве R будем искать при помощи сумм:

$$u_n = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^- - B^+) + (R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)\sum_{k=0}^{n} C_k \rho^k y_k(\varphi, \theta),$$

где $y_k(\varphi, \theta)$ — сферические функции. Неизвестные коэффициенты C_k определяют при помощи метода Ритца. Тогда поверхность $\Gamma_0 \colon \rho = \rho_0(\varphi, \theta)$ определяется из уравнения $u_n(\varphi, \theta, \rho_0(\varphi, \theta)) = 1$. При этом необходимо учесть, что $|\nabla u(x)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ в $\overline{\Omega}$, где ε_0 — некоторая постоянная [2].

Лемма 2. *При малых t справедливо представление*

$$\Gamma_t \colon \rho(\varphi, \theta, t) = \rho_0(\varphi, \theta) - \mathrm{Re}\,\frac{u_1^\pm(\varphi, \theta, t)}{|\nabla A^\pm(\varphi, \theta)|} + 0(\mathrm{Re}), \qquad (\varphi, \theta) \in \Gamma_0. \tag{3}$$

Здесь Re *— число Рейнольдса, а* $u_1^\pm(\varphi, \theta, t)$ *— первое приближение исходной задачи, изученной в [1].*

В частности, для нулевого приближения $u_0(\varphi, \theta)$ из уравнения

$$u_o = B^+ + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2}(B^- - B^+) + (\rho^2 - r^2)(R^2 - \rho^2)C_0 = 1$$

легко найти поверхность $\rho_0(\varphi, \theta)$.

Рассмотрим величину $\varepsilon_n = I(u_n, \Gamma_0) - I(u, \Gamma_0)$, где u — точное решение задачи (1). Тогда можно установить, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, если C_k — коэффициенты Ритца. Используя затем результаты Канторовича Л. В. по минимизации квадратичных функционалов аналогично тому, как это сделано в [1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Последовательность приближений Ритца* u_n *сходится к решению задачи* (1) *и по норме в* W_2^1 *и* C, *причем* $\varepsilon_n = O(\omega^{(3)}(u, 1/n)/n^2)$, *и если* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega^{(3)}(u, 1/n)n^{-1}(\ln n)^{1+\varepsilon} = 0$, *то*

$$\|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_1\omega^{(3)}\biggl(u, \frac{1}{n}\biggr)n^{-1} + C_2\sum_{S=m}^{\infty}\omega^{(3)}\biggl(u, \frac{1}{2^s}\biggr)2^{-s},$$

где C_1 *и* C_2 — *некоторые постоянные;* $\omega^{(3)}(u, 1/n)$ — *максимальный модуль непрерывности производных третьего порядка функции* $u(x)$ *и* $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$.

Замечание. В случае двух геометрических переменных имеют место оценки:

$$\varepsilon_n = \mathrm{O}\biggl(\frac{1}{n^{2(2+\alpha)}}\biggr), \qquad \|u_n - u\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_1\sqrt{\varepsilon_n \ln\frac{n}{\varepsilon_n}} + C_2\sqrt{\varepsilon_n}. \tag{4}$$

В работе [1] изучены k-е приближения $(\overrightarrow{V}, u_k^{\pm}, \rho_k)$ исходной задачи, являющиеся функциями класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega^{\pm}})$, построены системы уравнений, решениями которых они являются. Формулы (3), (4) позволяют исследовать Γ_t в зависимости от Re.

3. Пусть T^* — температура, которую должна достичь поверхность $\partial\Omega$. Эта температура достигается за счет воздействия тепловых потоков мощности w_1, w_2, w_3, причем мощность одного из них w_3 равномерно распределена в центре $\partial\Omega$, а два других w_1 и w_2 сконцентрированы по краям $\partial\Omega$ [3]. Далее будет предложен метод нечеткого управления в данном классе задач, который имеет место в спецметаллургии [4].

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — факторы, влияющие на процесс кристаллизации, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — условия, при которых происходит появление нового слитка. Тогда нечеткое управление в нашей модели можно представить в виде функционального отображения $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \to Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$.

В простейшем случае, например, в качестве терм-множества лингвистических переменных x_1, x_2, x_3, где $x_1 = \{$“температура слитка”$\}$, $x_2 = \{$“способ нагрева”$\}$, $x_3 = \{$“слиток металла”$\}$, можно использовать соответственно множества: $T = \{$“минимальная”, “средняя”, “максимальная”$\}$, $W = \{$“минимальный”, “средний”, “максимальный”$\}$, $L = \{$“минимальный”, “средний”, “максимальный”$\}$. Следовательно, получим:

$$x = \{x_1, x_2, x_3\} \to y \in [a, b],$$

где a и b — некоторые числа, а для выходной лингвистической переменной y (температура поверхности слитка) будет использоваться терм-множество $Q = \{$“минимальная”, “средняя”, “максимальная”$\}$. Пределы a и b выбираются таким образом, чтобы произошло отделение слитка от стенок кристаллизации [3]. Далее формируется база нечетких высказываний из 17 правил.

При численной реализации задачи использовались следующие значения параметров:

$$2500 \text{ МВт/м}^2 \leqslant W \leqslant 5000 \text{ МВт/м}^2, \qquad 600 \text{ мм} \leqslant L \leqslant 6000 \text{ мм}.$$

Численный расчет, позволяющий построить нечеткое управление, осуществлялся с помощью стандартного алгоритма Мамдани, а результаты получены в ходе эксперимента на объектах управления ЭШП [3].

1. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Задача Стефана при наличии конвекции // Доп. НАН України. – 2012. – № 1. – С. 25–29.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.
3. *Патон Б. Е.* Избранные труды. – Киев: Изд-во Ин-та электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
4. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев: Изд-во Ин-та пробл. искусств. интеллекта НАН Украины, 2012. – 130 с.

Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступило в редакцию 31.07.2012

Член-кореспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко**

Математичне моделювання одного класу складних систем з застосуванням нечіткої логіки

Будується просторова математична модель кристалізації металу з урахуванням конвективного теплообміну. При керуванні цим процесом застосовується нечітка логіка. Методом Рітца будується наближений розв'язок, збіжний до точного розв'язку в W_2^1 *і* C.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

Mathematical modeling of a class of complex systems with using a fuzzy logic

A three-dimensional mathematical model with convection is built. The control over this process with using a fuzzy logic is realized. By using the Ritz method, an approximate solution convergent to the exact solution in W_2^1 *and* C *is constructed.*