УДК 551.46

А. В. Кистович, член-корреспондент НАН Украины **В. И. Никишов,**
Ю. Д. Чашечкин

Интегральные модели нелинейных поверхностных волн в идеальной жидкости

Методами теории возмущений построены новые интегральные уравнения для возвышений свободной поверхности, которые описывают распространение широкого класса установившихся и нестационарных гравитационных волн в идеальной жидкости. В работе не использовались дополнительные предположения о степени малости величины возвышения свободной поверхности по сравнению с характерным пространственным масштабом. В отличие от уравнения Кортевега–де Фриза, полученные уравнения описывают волны, бегущие в обоих направлениях оси абсцисс. В предельных случаях полученные уравнения описывают нелинейные периодические волны и известные типы уединенных волн. Показано, что при малых амплитудах уравнения переходят в известные уравнения линейной теории волн.

Исследования гравитационных волн на поверхности идеальной жидкости занимают особое место в механике, математике и физике. Новые теоретические результаты стимулируют развитие техники измерений, методов обработки и представления данных. Прецизионные эксперименты позволяют найти границы применимости моделей, играющих важную роль в механике, физической океанографии, гидрологии, экологии, обеспечении безопасности мореплавания в открытом океане и в прибрежных районах. На начальном этапе изучалось распространение периодических возмущений, были введены понятия групповых и фазовых скоростей, рассчитаны свойства линейных и некоторых типов нелинейных волн [1]. Начиная с середины XIX века стали создаваться модели, учитывающие влияние нелинейности и дисперсии, описывающие распространение не только периодических, но и уединенных волн.

Разрушительное действие волн, представляющее опасность даже для новейших судов, буровых платформ, морских и береговых сооружений, стимулирует продолжение поиска условий формирования возмущений аномально большой амплитуды и развитие общей теории волн. При этом, наряду с исследованием решений различных модельных уравнений (Стокса, Кортевега–де Фриза, Шредингера) изучаются общие свойства систем определяющих уравнений, представленных и в дифференциальной, и в интегральной форме. Число публикаций по теме, включающих оригинальные исследования, обзорные статьи [2] и монографии [1, 3], непрерывно увеличивается. Постановки задач усложняются и все более полно соответствуют реальным условиям. В частности, изучается распространение волн в слое жидкости не только над ровным, но над деформируемым [3] и подвижным дном [4]. Еще в прошлом веке наряду с локальным (дифференциальным) стал развиваться и нелокальный (интегральный) подход к описанию волновых процессов. Интегральное уравнение, выведенное А. И. Некрасовым еще в 1921 г. в предположении о симметричности формы волны [5], изучалось в ряде глубоких исследований и было положено в основу доказательства существования установившихся нелинейных волн [6].

Асимптотическая редукция системы уравнений для трехмерных волн на неровном дне, включающей интегральное уравнение для возвышения и уравнение для потенциала скорости на поверхности жидкости, к уравнениям Буссинеска, Бенне–Люка и нелинейному уравнению Шредингера была выполнена в [7]. Отдельное нелинейное уравнение получено для бегущих нестационарных волн [8]. Интерес к развитию нелокального описания обусловлен поиском форм возмущений [9], соответствующих реальной картине взволнованной морской поверхности, отличающейся от вида модельных функций теории линейных и нелинейных волн [6–8].

Практический интерес представляет определение условий формирования и предельных форм разрушительных волн большой амплитуды (rogue или freak waves в англоязычной литературе) [9].

В данной работе представлены новые интегральные уравнения для возвышений свободной поверхности тяжелой жидкости, которые описывают распространение широкого класса установившихся и нестационарных волн. Рассматривается распространение двухмерных потенциальных волн на поверхности слоя однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины h в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения g. Волны описываются уравнениями Эйлера и неразрывности со стандартными граничными условиями на взволнованной поверхности и плоском дне [1]

$$\begin{aligned} &u'_t + uu'_x + wu'_z = -p'_x - g{\zeta'}_x, \qquad w'_t + uw'_x + ww'_z = -p'_z, \\ &u'_x + w'_z = 0, \qquad u'_z - w'_x = 0, \\ &p|_{z=\zeta} = 0, \qquad w - u{\zeta'}_x|_{z=\zeta} = {\zeta'}_t, \qquad w|_{z=-h} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x, z, t — декартовы координаты и время; $v_x = u$, $v_z = w$ — компоненты безвихревого поля скорости жидкости $\mathbf{v}$; функция $\zeta(x,t)$ задает форму свободной поверхности; p — порожденное волной возмущение давления, нормированное на плотность жидкости. Штрихом обозначены производные по переменной, указанной нижним индексом.

Введение потенциала ϕ ($u = \phi'_x$, $w = \phi'_z$) позволяет проинтегрировать уравнения Эйлера

$$p = -\phi'_t - \frac{{\phi'}_x^2 + {\phi'}_z^2}{2} - g\zeta \tag{2}$$

и редуцировать исходную задачу к виду

$$\begin{aligned} &\varphi''_{xx} + \varphi''_{zz} = 0, \\ &\varphi'_t + \frac{{\varphi'}_x^2 + {\varphi'}_z^2}{2}\bigg|_{z=\zeta} = -g\zeta, \qquad \varphi'_z - \varphi'_x\zeta'_x\big|_{z=\zeta} = -\zeta'_t, \qquad \varphi'_z\big|_{z=-h} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В соотношении (2) постоянная интегрирования положена равной нулю, поскольку при отсутствии волнения ($\zeta = 0$, $\phi = 0$) возмущения давления за счет поверхностной волны также должны быть равны нулю.

Потенциал ϕ вблизи поверхности $z = \zeta(x,t)$, следуя подходу [10], представляется в виде разложения

$$\varphi = \Phi_0(x,t) + \Phi_1(x,t)(z-\zeta) + \Phi_2(x,t)(z-\zeta)^2 + \Phi_3(x,t)(z-\zeta)^3 + \cdots , \tag{4}$$

подстановка которого в уравнение Лапласа системы (3) приводит к последовательности соотношений

$$\Phi_n = \frac{1}{n(n-1)}\frac{(n-1)\Phi_{n-1}\zeta''_{xx} + 2(n-1)\Phi'_{n-1_x}\zeta'_x - \Phi''_{n-2_{xx}}}{1 + {\zeta'}_x^2}, \qquad n \geqslant 2. \tag{5}$$

Подстановка разложения (4) в кинематическое граничное условие системы (3) на свободной поверхности порождает связь

$$\Phi_1 = \frac{\Phi'_{0x}\zeta'_x + \zeta'_t}{1 + \zeta'^2_x}, \tag{6}$$

а из динамического граничного условия, с учетом (6), получается уравнение для функции Φ_0

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(1 + \zeta'^2_x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\zeta'_x\zeta'_t - \frac{1}{2}\zeta'^2_t + g\zeta(1 + \zeta'^2_x) = 0. \tag{7}$$

Выполнение всех промежуточных преобразований приводит к интегральному уравнению

$$\Phi_0(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(k(\zeta(x,t) + h))}{\operatorname{ch}(kh)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x',t)\cos(k(x - x'))\,dx'dk, \tag{8}$$

где $F(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-\zeta)^n \Phi_n$.

Соотношения (5)–(8) описывают распространение потенциальных поверхностных волн.

Теория двухмерных течений несжимаемой жидкости допускает альтернативный подход, основанный на введении функции тока ψ, задающей компоненты скорости соотношениями $u = \psi'_z$, $w = -\psi'_x$. Использование разложения

$$\psi = \Psi_0(x,t) + \Psi_1(x,t)(z - \zeta) + \Psi_2(x,t)(z - \zeta)^2 + \Psi_3(x,t)(z - \zeta)^3 + \cdots \tag{9}$$

для функции тока вблизи свободной поверхности и применение представленной выше методики приводит к системе соотношений

$$\begin{aligned}
&\Psi_n = \frac{1}{n(n-1)}\frac{(n-1)\Psi_{n-1}\zeta''_{xx} + 2(n-1)\Psi'_{n-1_x}\zeta'_x - \Psi''_{n-2_{xx}}}{1 + \zeta'^2_x}, \qquad n \geqslant 2,\\
&\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + \zeta'_t = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}[\Psi_1(1 + \zeta'^2_x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[\Psi_1^2(1 + \zeta'^2_x)] + \zeta''_{tt}\zeta'_x + g\zeta'_x = 0,\\
&\Psi_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(k(\zeta(x,t) + h))}{\operatorname{sh}(kh)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x',t)\cos(k(x - x'))\,dx'dk,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $F(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-\zeta)^n \Psi_n$.

Следует особо отметить, что при выводе соотношений (5)–(8) и (10) не делается никаких дополнительных предположений о малости возвышения ζ по сравнению с характерным пространственным масштабом (например, с длиной волны). Единственное ограничение — глубина впадины (модуль отрицательного отклонения свободной поверхности) не может превышать глубину жидкости h.

Для инфинитезимальных волн, когда для всех $k \neq \infty$ выполняется неравенство $|k\zeta| \ll 1$, допустимо разложение

$$\frac{\operatorname{ch}(k(\zeta + h))}{\operatorname{ch}(kh)} \approx 1 + k\zeta(x,t)\operatorname{th}(kh) + o(k\zeta(x,t)). \tag{11}$$

Подстановка представления (11) в интегральное уравнение (8), введение спектрального представления для поверхностного волнения

$$\zeta(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (A(k,t)\cos(kx) + B(k,t)\sin(kx))\,dk \tag{12}$$

приводит к уравнению для спектральных амплитуд

$$F''_{tt} + gk\operatorname{th}(kh)F = 0, \tag{13}$$

где F — это A или B.

Подстановка решения (13) в форме плоских волн с частотой ω и волновым числом k формирует известное дисперсионное уравнение $\omega^2 = gk\operatorname{th}(kh)$ для инфинитезимальных гармонических волн [1].

Для стационарного поверхностного волнения ($\zeta''_{tt} = c^2\zeta''_{xx}$, где c — скорость распространения) из (12), (13) следует известный результат [1]: волна имеет синусоидальную форму $\zeta(x,t) = a\sin(k_1(x - ct) + b)$ (a, b, k_1 — постоянные), а ее скорость определяется выражением $c^2 = g\operatorname{th}(k_1h)/k_1$.

Если возвышение поверхности представляет собой длинноволновой пакет (т. е. носители спектральных амплитуд A и B ограничены областью $|kh| \ll 1$), соотношение (8) приобретает вид

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\zeta''_{tt} - gh\frac{\partial^2\zeta}{\partial x'^2}\right)\cos(k(x - x'))\,dx'dk \approx 0,$$

из которого следует, что возвышение поверхности удовлетворяет уравнению

$$\zeta''_{tt} - gh\zeta''_{xx} = 0, \tag{14}$$

т. е. длинноволновой пакет распространяется со скоростью $c = \sqrt{gh}$, практически сохраняя свою форму.

Волны конечной амплитуды a с характерным продольным масштабом L, для которых справедливы отношения $a \ll h \ll L$, характеризуются двумя малыми параметрами: крутизной $\varepsilon = a/h$ и относительной глубиной $\delta = h/L$. Дальнейшее исследование проводится в безразмерных переменных x', t', определяемых соотношениями

$$x = Lx', \qquad t = \frac{L}{c}t', \qquad \zeta = aZ(x',t'), \qquad \max|Z| = 1,$$

где c — характерный масштаб скорости распространения поверхностных возмущений. Волновое число также нормируется на масштаб L: ($k = k'/L$).

Использование малости параметров ε и δ позволяет при $k'\delta \leqslant 1$ свести систему (5)–(8), с точностью до членов третьего порядка малости по ε и δ, к уравнению

$$\sigma S''_{xx} - S''_{tt} + \frac{\delta^2\sigma}{3} S^{IV}_{xxxx} + \varepsilon\sigma(S'_x S''_{xt} + S'_t S''_{xx}) + \frac{\varepsilon\sigma^2}{2}\int (S'^2_x)''_{xx} dt \approx 0, \tag{15}$$

где $Z = S'_t$, $\sigma = gh/c^2$, которое в случае стационарных волн, когда $S(x,t) = S(x-t)$, $\zeta(x,t) = \zeta(x-t)$, преобразуется к виду

$$\frac{\delta^2\sigma}{3} Z'' + (\sigma - 1)Z + \varepsilon\sigma\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right)Z^2 = 0. \tag{16}$$

Нетривиальное решение уравнения (16) описывает семейство кноидальных волн

$$Z(y) = 1 - 3\alpha m^2 \overset{2}{\mathrm{sn}}(y,m), \qquad \alpha = \left(1 + m^2 \pm \sqrt{1 + m^4 - m^2}\right)^{-1}, \qquad y = x - t, \tag{17}$$

где $\mathrm{sn}(y,m)$ — эллиптическая функция Якоби [11]

$$\mathrm{sn}(y,m) = \sin\varphi, \qquad y = \int\limits_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\theta}}, \qquad m \in [0,1].$$

Продольные масштабы этих волн $L(m) \approx h\varepsilon^{-1/2}/\delta_0(m)$ и скорость распространения $c^2(m) = gh/(1+\varepsilon\sigma_1)$ ($\delta_0 = 3\sqrt{\alpha}/2$, $\sigma_1 = \mp 3\alpha\sqrt{1 + m^4 - m^2}$) зависят от параметра m. В предельном случае $m = 1$ решения (17) дают уединенную волну Рассела [1].

В общем случае дифференцирование уравнения (15) по времени позволяет записать его в форме

$$\sigma Z''_{xx} - Z''_{tt} + \frac{\delta^2\sigma}{3} Z^{IV}_{xxxx} + \varepsilon\sigma\left[\left(Z'_x \int Z'_x dt + Z\int Z''_{xx} dt\right)'_t + \frac{\sigma}{2}\left(\left(\int Z'_x dt\right)^2\right)''_{xx}\right] \approx 0. \tag{18}$$

Вычисления показали, что решение вида $Z(x-t)$ порождает функцию $Z(x+t)$, также удовлетворяет уравнению (18), которое, таким образом, описывает волны, бегущие в обоих направлениях (в отличие от уравнения КдФ [12]). Следовательно, здесь не возникает искусственная анизотропия пространства, которая наблюдается в уравнениях КдФ и в системах приближенных интегральных уравнений [7, 8]. При этом исходным системам уравнений (1), как и в [7, 8], анизотропия не свойственна, она возникает в результате применения к ним теории возмущений, развитой в [13]. Следует также отметить, что анизотропия КдФ-уравнения порождается особенностями постановки задачи, в которой изучалось распространение малых медленных длинномасштабных возмущений потока, текущего в положительном направлении горизонтальной оси со скоростью $u = u_0$ [12].

При отказе от малости возмущений использование развиваемого подхода, представленного в настоящей работе, приводит к возникновению пары КдФ-уравнений

$$Z'_t \pm \left(\mu - \frac{\sigma}{\mu}\right)Z'_x \mp \frac{\varepsilon\sigma}{\mu}\left(1 + \frac{\sigma}{2\mu^2}\right)(Z^2)'_x \mp \frac{\delta^2\sigma}{3\mu} Z'''_{xxx} = 0, \tag{19}$$

где $\mu = u_0/c$; c — характерный масштаб скорости распространения поверхностных возмущений. Здесь для волны, бегущей в положительном направлении оси x, берутся верхние знаки, для противоположного направления — нижние. При этом для второго уравнения (19) возмущение исходного поля скорости определяется величиной $-2u_0$ с добавлением малой поправки по сравнению с u_0. Парные уравнения (19) взаимно переходят друг в друга при замене $\mu \leftrightarrow -\mu$ (т. е. при смене направления исходного течения), что устраняет искусственную пространственную анизотропию.

Поскольку интегро-дифференциальное уравнение (18), в отличие от (19) и уравнения КдФ [12], не вырождается в предельном случае $u_0 \to 0$, его анализ представляет самостоятельный интерес при изучении уединенных волн большой амплитуды.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Украины и РФФИ (грант 18-01-12 (У), 12-05-90417 (Р)).

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975. – 752 p.
2. *Craig W., Groves M. D., Schneider G., Toland J. F.* Recent developments in the mathematical theory of water waves – introduction // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. – 2002. – **360 A**. – P. 2107–2109.
3. *Dingemans M. W.* Water wave propagation over uneven bottoms. Part 1. Linear wave propagation. Part 2. Non-linear wave propagation // Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 13. – Singapore: World Scientific, 1997. – 700 p.
4. *Селезов И. Т.* Эволюционное уравнение распространения поверхностных гравитационных волн при наличии донного возбуждения // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 3. – С. 99–104.
5. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. – Москва: Наука, 1977. – 815 с.
6. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. – Москва: Мир, 1964. – 656 с.
7. *Ablowitz M. J., Fokas A. S., Musslimani Z. H.* On a new non-local theory of water waves // J. Fluid Mech. – 2006. – **562**. – P. 313–343.
8. *Byatt-Smith J. G. B.* An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation // Ibid. – 1971. – **49**, Pt. 4. – P. 625–633.
9. *Muller P., Garrett C., Osborne A.* Rogue waves // Oceanography. – 2005. – **18**, No 3. – P. 66–75.
10. *Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.* Интегральная модель распространения установившихся потенциальных волн в жидкости // Докл. АН. – 2008. – **241**, № 3. – С. 335–340.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: ГИФМЛ, 1962. – 1100 с.
12. *Drazin P. G., Johnson R. S.* Solitons: an introduction. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 232 p.
13. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – Москва: Мир, 1988. – 694 с.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 07.12.2012

А. В. Кістович, член-кореспондент НАН України **В. І. Нікішов,**
Ю. Д. Чашечкін

Інтегральні моделі нелінійних поверхневих хвиль в ідеальній рідині

Методами теорії збурень побудовано нові інтегральні рівняння для підняття вільної поверхні, що описують поширення широкого класу усталених і нестаціонарних гравітаційних хвиль в ідеальній рідині. В роботі не використано припущення щодо ступеня малості величини підняття вільної поверхні порівняно з характерним просторовим масштабом. На відміну від рівняння Кортевега–де Фриза, отримані рівняння описують хвилі, що рухаються в обох напрямках вздовж осі абсцис. У граничних випадках одержані рівняння описують нелінійні періодичні хвилі та відомі типи поодиноких хвиль. Показано, що для малої амплітуди рівняння переходять у відомі рівняння теорії лінійних хвиль.

A. V. Kistovich, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. I. Nikishov,**
Y. D. Chashechkin

The integral models of nonlinear surface waves in ideal fluid

New integral equations for the elevation of a free surface are developed, basing on the methods of perturbation theory. They describe the propagation of a wide range of steady and unsteady gravity waves in ideal fluid. No additional assumptions about the order of smallness of the free surface elevation in comparison with a characteristic spatial scale are used. In distinction from the Korteweg–de Vries equation, the given equations describe waves that propagate in both directions of the abscissa axis. The presented equations describe nonlinear periodic waves and the known types of solitary waves in the limiting cases. It is shown that the equations are transformed in the well-known equations of linear wave theory for small amplitudes.