УДК 517.5

Т. В. Ломако

Критерий компактности для классов решений уравнений Бельтрами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Получен критерий компактности классов регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на комплексный коэффициент.

Недавно был доказан целый ряд новых теорем существования для вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, [1, 2]), что открыло широкое поле для исследований экстремальных задач в современных классах отображений на плоскости (см. [3, 4]). В теории экстремальных задач важную роль играют теоремы компактности. Ранее автором [5] (см. также [6]) были рассмотрены отображения класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с ограничениями на дилатацию интегрального типа и найдены условия компактности. В данной работе получены не только достаточные, но и необходимые условия компактности для классов отображений с интегральными ограничениями.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом* и

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \; — \tag{2}$$

максимальной локальной дилатацией или просто *дилатацией* уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $K_\mu \notin L^\infty$.

Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см., например, [7, I.1.6]). В дальнейшем гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ п. в. Наконец, *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D называется регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1) п. в. в D. Функции μ и K_μ называются *комплексной характеристикой* и *дилатацией* отображения f. Отметим, что понятие регулярного решения впервые введено в работе [8].

В дальнейшем $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = (1+|z|^2)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}}$, соответственно, через L^1_S — класс всех функций $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в $\mathbb{C}$ относительно сферической площади. Функция $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty \tag{3}$$

(см. [9, с. 37]). В дальнейшем *непрерывность* функции Φ понимается относительно топологии $\overline{\mathbb{R}^+} := [0, \infty]$. В дальнейшем также используется обозначение $\mathrm{I} := [1, \infty]$.

Напомним, что функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях*, пишут $f \in \mathrm{ACL}$, если для любого замкнутого прямоугольника R в D, стороны которого параллельны координатным осям, $f|_R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в R, параллельных сторонам R (см., например, [10, с. 27]).

Пусть $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — произвольная функция. Обозначим через $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$, $M \geqslant 0$, класс всех регулярных решений $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) с комплексными коэффициентами μ такими, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(K_\mu(z))\, dS(z) \leqslant M \tag{4}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Будем говорить, что функция $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет *экспоненциальный рост на бесконечности*, если

$$\Phi(t) \geqslant \beta e^{\gamma t} \tag{5}$$

для всех $t \geqslant T$ при некотором $T \geqslant 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. В [11, теорема 8], а также в [3, теорема 13.2] была доказана компактность классов H^{Φ}_M всех регулярных решений $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1) с интегральными ограничениями вида

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) \leqslant M \tag{6}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$ при условии, что функция Φ непрерывна, выпукла, не убывает, имеет экспоненциальный рост на ∞ и $\inf \Phi = 0$.

В упомянутой выше работе [6, теорема 3] была установлена компактность класса $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$ при условии, что функция $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ непрерывна, строго выпукла и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \ln \Phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2} = \infty \tag{7}$$

при некотором $\delta > \delta_0 := \sup\limits_{\substack{\tau \in \mathrm{I}, \\ \Phi(\tau) = 0}} \tau$. Здесь мы доопределяем $\delta_0 = 1$, если $\Phi(\tau) > 0$ для всех $\tau \in \mathrm{I}$.

В настоящей работе показываем, что указанные условия на функцию Φ являются не только достаточными, но и необходимыми для компактности классов $\mathfrak{F}^{\Phi}_M$. Отметим, что теоремы существования для таких классов были получены сравнительно недавно (см., например, [1, 2]).

Теорема замыкания. Нам понадобится понятие “нижней огибающей”, с подробным геометрическим описанием которой можно ознакомится в [11, с. 132; 3, с. 297]. *Нижней огибающей* функции Φ будем называть функцию

$$\Phi_0(t) := \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(t), \qquad t \in \mathrm{I}, \tag{8}$$

где Ψ — семейство всех непрерывных неубывающих выпуклых функций $\varphi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\varphi(t) \leqslant \Phi(t)$, $t \in \mathrm{I}$.

Следующие предложения играют важную роль при доказательстве приводимых ниже теорем.

Предложение 1. *Нижняя огибающая функции* $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *представляет собой наибольшую неубывающую выпуклую функцию* $\Phi_0\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, *которая непрерывна в смысле* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *слева в точке*

$$Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t \tag{9}$$

и график которой лежит ниже графика Φ. *При этом* $\Phi_0(t) \equiv \infty$ *для всех* $t > Q$ *и* $\Phi_0(t) < \infty$ *для всех* $t < Q$.

Предложение 2. *Пусть* $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *является выпуклой и удовлетворяет условию* (7). *Тогда ее нижняя огибающая* $\Phi_0\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *также удовлетворяет условию* (7).

Прототип следующей теоремы для функций Φ с экспоненциальным ростом на бесконечности можно найти в [11, теорема 7], а также [3, теорема 13.1].

Теорема 1. *Пусть для нижней огибающей* $\Phi_0\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *функции* $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *выполнено условие вида* (7). *Тогда в топологии равномерной сходимости в* $\overline{\mathbb{C}}$ *относительно сферической метрики*

$$\overline{\mathfrak{F}_M^{\Phi}} \subseteq \mathfrak{F}_M^{\Phi_0}. \tag{10}$$

Критерий компактности. Наконец, приведем необходимые и достаточные условия компактности для классов $\mathfrak{F}_M^{\Phi}$.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi\colon \mathrm{I} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *удовлетворяет условию* (7). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) классы $\mathfrak{F}_M^{\Phi}$ *компактны в топологии равномерной сходимости в* $\overline{\mathbb{C}}$ *относительно сферической метрики;*

2) функция Φ *непрерывна в смысле* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *слева в точке* Q *из* (9) *и строго выпукла.*

Замечание 1. Условие (7) является не только достаточным, но и необходимым для нормальности и, следовательно, для компактности класса $\mathfrak{F}_M^{\Phi}$, если Φ непрерывна, выпукла и не убывает (см. [12, теорема 5.1]).

В заключение отметим также, что теоремы компактности имеют важные приложения в теории экстремальных задач и теории вариационного метода. Дело в том, что в компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе, нелинейных функционалов. Кроме того, в компактных классах отображений с интегральными ограничениями множество комплексных характеристик выпукло, что значительно упрощает построение вариаций (см., например, [3, 4]).

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вест. – 2010. – **7**, No 4. – С. 467–515; transl in J. Math. Sci. – 2011. – **175**. – P. 413–449.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: A geometric approach, developments in mathematics. Vol. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.
3. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 2011. – 425 с.
4. *Гутлянский В. Я., Ломако Т. В., Рязанов В. И.* К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вест. – 2011. – **8**, № 4. – С. 513–536.

5. *Ломако Т. В.* Теоремы сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Доп. НАН України – 2011. – № 5. – С. 28–31.
6. *Ломако Т. В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 3. – С. 341–349.
7. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York: Springer, 1973. – 258 p.
8. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **54**, No 10. – P. 935–950.
9. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – Москва: Мир, 1974. – 160 с.
10. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – Москва: Мир, 1969. – 133 с.
11. *Рязанов В. И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 1993. – 281 с.
12. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 3. – С. 665–679.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 06.11.2012

Т. В. Ломако

Критерій компактності для класів розв'язків рівнянь Бельтрамі

Отримано критерій компактності класів регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на комплексний коефіцієнт.

T. V. Lomako

The criterion of compactness for classes of solutions to the Beltrami equations

The criterion of compactness for classes of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with constraints of the integral type for the complex coefficient is obtained.