Доповіді
національної
академії наук
України

5 • 2013

УДК 681.142

В. М. Заяць

Клас нових функцій для побудови дискретних моделей коливних систем з широким спектром динамічних режимів

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Запропоновано новий клас спеціальних функцій, які є комбінаціями показникових функцій з довільною основою та різним знаком показника. Підтверджено доцільність їх застосування до побудови та аналізу нелінійних дискретних моделей коливних систем з метою розширення діапазону можливих динамічних режимів.

Дискретні за своєю природою моделі відіграють фундаментальну роль для розуміння суттєво нелінійних явищ і процесів, що мають місце в системах або окремих об'єктах самої різної природи [1–5]. При розробленні таких моделей слід виходити з того, щоб

1) забезпечити максимум простоти моделі з метою її аналізу досить простими способами;

2) забезпечити широкий спектр можливих коливних режимів для відтворення основних характеристик сигналу як в часовій, так і в частотній області, а також забезпечити бажану форму сигналу;

3) мати можливість змінювати параметри системи та початкові умови з метою проектування або аналізу реальних пристроїв, об'єктів та систем.

Оскільки в роботі йдеться про побудову дискретних коливних моделей, то слід виходити з того, щоб при малій амплітуді коливань рух відбувався від нульового положення рівноваги в напряму її зростання, а при великих — в напряму її зменшення. Цього можна досягти, якщо в матрицю переходу станів ввести експоненційну функцію, яка залежить від амплітуди коливань, при цьому знак при експоненті повинен бути від'ємним. Якщо права частина дискретної моделі в ролі нелінійної функції матиме добуток експоненти з від'ємним знаком при аргументі, що стоїть під експонентою, на змінну стану, то для невеликих амплітуд внесок експоненти буде менш істотним, ніж змінної стану, і рух у фазовому просторі відбуватиметься в бік зростання амплітуди. Коли амплітуда стане достатньо великою, внесок експоненти в амплітуду переважатиме значення амплітуди і на наступному кроці відбудеться її зменшення. Зауважимо, що встановлений режим буде досягнутий в тому випадку, якщо побудована система буде стійкою [6, 7]. Це вимагає проведення додаткових досліджень моделі після її побудови. Відзначимо, що введення експоненти в матрицю переходу станів — далеко не єдиний спосіб забезпечити існування коливного процесу. Цього можна досягти і при виборі в ролі базової показникової функції з довільною основою, роль показника в якій виконуватиме амплітуда коливань, взята з від'ємним знаком. Очевидно, чим менша основа функції, тим більшого розмаху амплітуди слід очікувати. Роль базової функції можуть виконувати і гіперболічні функції або будь-які інші, які для малих значень аргументу змінюються слабше, ніж лінійна функція, а при великих аргументах їх вплив суттєвіший за лінійну функцію. Таким чином, з'являється можливість змінювати амплітуду коливань у широкому діапазоні.

Для забезпечення бажаної частоти коливань необхідно задати початкове значення фази коливань. Для цього слід ввести гармонійну функцію в матрицю переходу станів як однин із співмножників. Роль аргументу цієї функції відіграватиме початкова фаза коливань.

Нарешті, найпростішим способом можна забезпечити зміну параметрів моделі, якщо ввести постійний коефіцієнт в праву частину рівнянь стану моделі ще одним співмножником.

Оскільки мова йде про побудову моделей другого порядку, то, комбінуючи різні функції від амплітуди коливань та задаючись різними тригонометричними функціями для задання початкової фази коливань, можна отримати цілий клас моделей з різними матрицями переходу станів. Кожна з цих моделей має свою динаміку і потребує детального дослідження.

У роботі [1] на основі описаного підходу запропоновано загальну дискретну модель коливних рухів другого порядку:

$$\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ y_{m+1} \end{bmatrix} = af(-r) \begin{bmatrix} \cos\varphi l & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Якщо скористатися підходом, описаним в [1] для визначення амплітуди коливань моделі (1), отримаємо:

$$f(-r) = \frac{1}{a} \tag{2}$$

або у випадку парності функції f

$$r = g\left(\frac{1}{a}\right), \tag{3а}$$

а для непарної функції f маємо

$$r = g\left(-\frac{1}{a}\right), \tag{3б}$$

де g — функція, обернена до f, яку завжди можна визначити для однозначної неперервної функції. Відзначимо, що формули (3) справедливі, якщо композиція функційf і g є тотожним перетворенням незалежно від порядку їх слідування і дає значення аргументу функції. У випадку неоднозначності функції f можна визначити її обернено відповідні функції на ділянках монотонності функції f. Для складних неоднозначних функцій обернена функція може бути записана лише в неявному вигляді. У цих випадках для оцінки амплітуди коливань більш доцільно застосовувати формулу (2).

Нові функції на основі показникової з довільною основою. Для побудови нової моделі введемо нову функцію як півсуму показникових функцій з основою b, яку названо показниковим синусом:

$$\mathrm{s}b(x) = \frac{b^x - b^{-x}}{2}. \tag{4}$$

Тоді базова функція набуває вигляду:

$$f(-r) = -\,\mathrm{s}b(r). \tag{5}$$

Неважко переконатися, що обернену функцію до (4), яку названо показниковим арксинусом, можна подати у вигляді:

$$g(x) = \mathrm{ars}b(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\ln(b)}.$$

Внаслідок непарності функції (4) після підстановки останньої рівності в формулу (3б) отримаємо, що

$$r = \frac{\ln\left(\dfrac{(\sqrt{1+a^2}-1)}{a}\right)}{\ln(b)}.$$

З останньої рівності випливає, що в моделі (5) можуть виникати гармонічні рухи при $a > 0$ і $b < 1$. Таким чином, наявність знаменника в останньому виразі сприяє появі коливних рухів незалежно від знака аргументу, з яким береться базова функція. Дійсно, взявши як базову функцію (5) з протилежним знаком під аргументом і застосувавши формулу (2), після ряду перетворень одержуємо значення амплітуди коливань

$$r = \frac{\ln\left(\dfrac{(\sqrt{1+a^2}+1)}{a}\right)}{\ln(b)}.$$

Коливання в моделі (5) виникатимуть, якщо $b > 1$ при будь-яких додатних значеннях параметра a. У справедливості останньої формули можна переконатися після її підстановки в (2) та використання наведеного вище подання для оберненої функції.

Для побудови іншої моделі введено ще одну нову функцію як півсуму показникових функцій з основою b, яку назвемо показниковий косинус:

$$\mathrm{c}b(x) = \frac{b^x + b^{-x}}{2}. \tag{6}$$

Тоді базова функція набуває вигляду:

$$f(-r) = \mathrm{c}b(r). \tag{7}$$

Можна переконатися, що обернена функція до (6), яку названо показниковим арксинусом, може бути подана у вигляді:

$$g(x) = \mathrm{arc}b(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2-1})}{\ln(b)}.$$

Аналогічно до описаних t$h(x)$ і ct$h(x)$ в [7], введемо в розгляд показниковий тангенс, який будемо позначати t$b(x)$, і показниковий котангенс, який позначатимемо ct$b(x)$. Використовуючи означення (4) і (6), можна записати

$$\mathrm{t}b(x) = \frac{\mathrm{s}b(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{b^x - b^{-x}}{b^x + b^{-x}}; \qquad \mathrm{ct}b(x) = \frac{\mathrm{s}b(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{b^x + b^{-x}}{b^x - b^{-x}}. \tag{8}$$

Відповідні їм обернені функції — показниковий арктангенс та показниковий арккотангенс позначатимемо відповідно art$b(x)$ і arct$b(x)$ і їх можна визначити через елементарні функції так:

$$y = \mathrm{art}b(x) = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{\ln(b)}; \qquad y = \mathrm{arct}b(x) = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{\ln(b)}. \tag{9}$$

Проведений аналіз поведінки спеціальних показникових функцій (sb, cb, tb, ct$b$) показує, що вони мають значно ширший спектр динамічних режимів, ніж гіперболічні. А тому їх введення має не тільки чисто академічне значення, а й прикладне, оскільки дозволяє ефективніше справлятися з проблемами моделювання динамічних режимів дискретних систем. По суті справи, гіперболічні функції є частковим випадком введених у розгляд спеціальних показникових функцій, які при виборі основи показника b, що дорівнює величині натурального логарифма, повністю збігаються з гіперболічними функціями. Тим не менше, основні властивості гіперболічних функцій, зв'язки між ними, значення похідних від цих функцій та обернені до них функції з точністю до множників збігаються при заміні елементарної функції $\exp(x)$ на b^x. Основні властивості для спеціальних показникових функцій наведені у табл. 1.

Гіперпоказникові спеціальні функції та їх основні властивості. Розглянемо доцільність застосування функції вигляду

$$f(-r) = r^{-r} \tag{10}$$

до побудови дискретних моделей коливних процесів. Перш за все, ця функція є ні парною, ні непарною. Крім того, вона є неоднозначною навіть для додатних значень аргументу і розривною при від'ємних значеннях аргументу. Застосувавши (2) до описаної функції, отримаємо неявне рівняння для знаходження можливих амплітуд гармонічних коливань

$$r^r = a. \tag{11}$$

Таблиця 1. Основні властивості спеціальних показникових функцій

Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$	Обернена $g(x)$	Амплітуда r
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{arsh}(x)$	$\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+a^2}+1}{a}\right)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{arch}(x)$	$\ln\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$
$\mathrm{th}(x)$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\mathrm{arth}(x)$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)$
$\mathrm{cth}(x)$	$-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$	$\mathrm{arcth}(x)$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)$
$\mathrm{s}\,b(x)$	$\ln(b) * \mathrm{c}\,b(x)$	$\mathrm{ars}\,b(x) = \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(b)}$	$\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+a^2}+1}{a}\right)}{\ln(b)}$

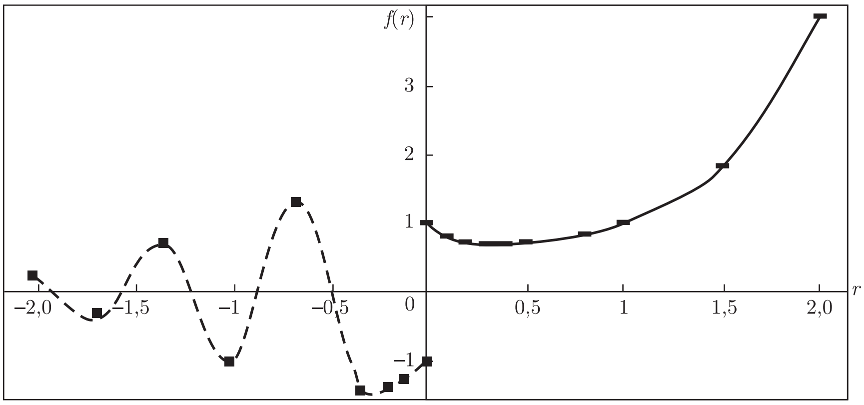

Рис. 1. Графік функції $f(r) = r^r$

Якщо побудувати графік функції (11), який показано на рис. 1, можна побачити, що існує діапазон значень параметра $0 < a < 1$, де можливе виникнення двох гармонічних режимів.

Оскільки похідна функції (11), аналогічно (10), перетворюється на нуль при $r = 1/e \cong 0{,}3679$, а функція при цьому досягає свого мінімуму в точці 0,6922 (друга похідна додатна в цій точці), то можна твердити, що в діапазоні зміни параметра a від 0,6922 до 1 можливе існування двох гармонічних режимів. При $a < 0{,}6922$ коливання, очевидно, будуть загасати. Відзначимо, що при від'ємних значеннях r ця функція має нескінченне число локальних екстремумів та розривів.

Наведену функцію (10) можна використати для побудови нового класу спеціальних функцій, які позначено $\mathrm{s}x(x)$, $\mathrm{c}x(x)$, $\mathrm{t}x(x)$, $\mathrm{ct}x(x)$ і названо гіперпоказниковим синусом, косинусом, тангенсом і котангенсом. Введемо такі означення

$$\begin{aligned} &\mathrm{s}x(x) = \frac{x^x - x^{-x}}{2}; \qquad \mathrm{c}x(x) = \frac{x^x + x^{-x}}{2}; \\ &\mathrm{t}x(x) = \frac{\mathrm{s}x(x)}{\mathrm{c}x(x)} = \frac{x^x - x^{-x}}{x^x + x^{-x}}; \qquad \mathrm{ct}x(x) = \frac{\mathrm{c}x(x)}{\mathrm{s}x(x)} = \frac{x^x + x^{-x}}{x^x - x^{-x}}, \end{aligned} \tag{12}$$

виходячи з яких неважко переконатися у справедливості властивостей

$$\mathrm{c}x^2(x) - \mathrm{s}x^2(x) = 1 \qquad \text{і} \qquad \mathrm{ct}x(x) = \frac{1}{\mathrm{t}x(x)},$$

які мають місце і для гіперболічних функцій. Таким чином, можна стверджувати, що всі взаємні зв'язки, які мають місце для гіперболічних функцій, справедливі і для введених гіперпоказникових функцій. Зауважимо, що ці функції є повністю визначеними для додатних значень аргументу x. Для введених спеціальних показникових та гіперпоказникових функцій справедливий такий зв'язок з гіперболічними функціями:

$$\mathrm{s}b(x) = \mathrm{sh}(x\ln(b)) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{s}x(x) = \mathrm{sh}(x\ln(b)).$$

В цьому можна легко переконатися, виходячи з означення гіперболічного синуса та використовуючи першу формулу (12). Застосовуючи наведені означення (12), можна показати

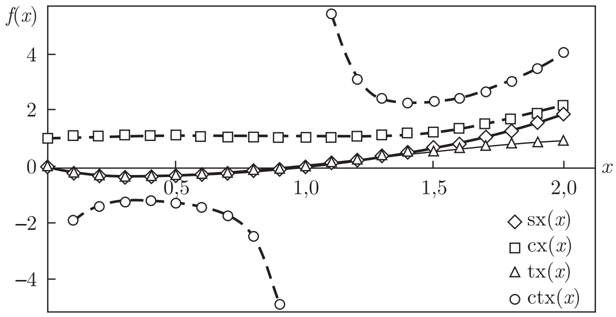

Рис. 2. Графіки гіперпоказникових функцій

справедливість аналогічних зв'язків і для всіх інших введених функцій. В явній формі неважко також виразити гіперболічний та гіперперпоказниковий синуси через показниковий синус таким чином:

$$\mathrm{sh}(x) = \mathrm{s}b\left(\frac{x}{\ln(b)}\right) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{s}x(x) = \mathrm{s}b\left(\frac{x\ln(x)}{\ln(b)}\right).$$

На жаль, ні гіперболічні, ні показникові спеціальні функції в явній формі не виражаються через гіперпоказникові. Графіки гіперпоказникових функцій, що визначаються формулами (12), показані на рис. 2.

Відзначимо, що всі гіперпоказникові функції є ні парними, ні непарними, тому для аналізу гармонічного режиму доцільно застосовувати співвідношення (2).

Таким чином, проведений аналіз дозволяє зробити висновки щодо доцільності застосування тих або інших функцій для отримання широкого спектра динамічних коливних режимів. Із зіставлення отриманих виразів для визначення амплітуд коливань випливає, що застосування звичайної показникової функції з довільною основою b приводить до появи гармонічних режимів в значно ширшому діапазоні зміни параметра a, ніж використання експоненційної функції, оскільки з'являється можливість впливати на амплітуду коливань за рахунок зміни параметра b. Зіставляючи попарно вирази для знайдених амплітуд гармонічних коливань при використанні гіперболічних функцій з відповідними виразами при використанні спеціальних показникових функцій при двох знаках їх аргументів (крім $\mathrm{c}b$) та відповідними виразами при застосуванні гіперпоказникових функцій при двох знаках перед самими функціями (окрім $\mathrm{c}x$), можна зробити такі висновки:

1) використання введених спеціальних показникових функцій (6) та (8), які названі, відповідно, показниковим синусом, тангенсом та котангенсом і позначені $\mathrm{s}b$, $\mathrm{t}b$ та $\mathrm{ct}b$, при побудові дискретних моделей типу (1) забезпечує появу режимів як при додатних значеннях аргументу (це має місце і у відповідних гіперболічних функціях), так і при від'ємних (що не спостерігається у гіперболічних функціях). Наявність параметра b у виразах для амплітуди коливань розширює діапазон її зміни порівняно з моделями, де застосовуються гіперболічні функції;

2) побудова дискретної моделі при використанні показникового косинуса, який визначений рівністю (6), якісно не змінює характер гармонічних режимів порівняно з використанням гіперболічного косинуса, але розширює діапазон зміни амплітуди коливань за рахунок зміни параметра b;

3) найбільш доцільно застосовувати при побудові дискретних моделей нововведені гіперпоказникові функції, які названі, відповідно, гіперпоказниковим синусом, тангенсом та

котангенсом і позначені sx, tx та ct$x$. Незважаючи на те, що ці функції відносяться до класу ні парних, ні непарних функцій, вони забезпечують появу гармонічних режимів як при їх використанні у вигляді (12), так і при зміні знака перед ними. Потрібно відзначити, що в останньому випадку можлива поява двох різних гармонічних режимів з амплітудами коливань, меншими за одиницю;

4) при застосуванні до побудови дискретної моделі гіперпоказникового косинуса нових якісних особливостей поведінки моделі в гармонічному режимі не виявлено, порівняно з використанням гіперболічного або показникового косинуса. Зауважимо, що в цьому випадку амплітуда коливань перевищує одиницю;

5) недолік застосування гіперпоказникових функцій до побудови дискретних моделей в тому, що отримані аналітичні вирази для оцінки амплітуди коливань мають неявний вигляд. По суті справи, це і є плата за доволі широкий діапазон гармонічних коливних режимів в моделях, де використані гіперпоказникові функції. Однак це не знецінює доцільності їх застосування до побудови дискретних моделей, оскільки ці режими повністю можуть бути вивчені при застосуванні графоаналітичних та числовоаналітичних методів аналізу [5].

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981. – 568 с.
2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
3. *Заяць В. М.* Дискретні моделі коливних систем для аналізу їх динаміки. – Львів: Вид-во Укр. академії друкарства, 2011. – 284 с.
4. *Заяць В. М.* Построение и анализ дискретной модели дискретной колебательной системы // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 4. – С. 161–165.
5. *Самойленко А. М., Ронто М. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 180 с.
6. *Видаль П.* Нелинейные импульсные системы. – Москва: Энергия, 1974. – 336 с.
7. *Заяць В. М.* Аналіз динаміки та умов стійкості дискретних моделей коливних систем // Вісн. НУ "Львівська політехніка". "Інформаційні системи та мережі". – 2004. – № 519. – С. 132–142.

Національний університет "Львівська політехніка" *Надійшло до редакції 30.10.2012*

В. М. Заяць

Класс новых функций для построения дискретных моделей колебательных систем с широким спектром динамических режимов

Предложен новый класс специальных функций, которые являются комбинациями показательных функций с произвольной основой и разным знаком показателя. Подтверждена целесообразность их применения к построению и анализу нелинейных дискретных моделей колебательных систем с целью расширения диапазона возможных динамических режимов.

V. M. Zayats

Class of new functions to build discrete models of oscillating systems with a wide range of dynamic regimes

A new class of special functions that are combinations of exponential functions with an arbitrary basis and different signs of the indicator is proposed. The expediency of their application to the construction and the analysis of nonlinear discrete models of oscillating systems in order to extend the range of possible dynamical regimes is substantiated.