УДК 519.85

Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян, Г. Н. Яськов**

Переход от одного локального минимума к другому в задаче упаковки неравных кругов в полосе минимальной длины

Рассматривается задача упаковки неравных кругов в прямоугольник заданной ширины и минимальной длины. На основе идеи увеличения размерности пространства решений строится математическая модель задачи и исследуются ее свойства. Стратегия решения задачи включает построение стартовых точек, вычисление локальных минимумов, увеличение размерности пространства решений задачи и переход от одного локального минимума к другому, который обеспечивает уменьшение длины прямоугольника. Вычислены 146 известных тестовых примеров и 7 новых.

Задачи упаковки кругов имеют ряд применений в различных отраслях промышленности, например, в легкой, машиностроительной, аэрокосмической, химической и др. [1]. Задача была впервые сформулирована как задача математического программирования в работе [2]. В [3] для упаковки кругов в прямоугольник фиксированных размеров предложены эффективные эвристические жадные алгоритмы B1.0 и B1.5, которые получили развитие в работах [4, 5]. В [6] приведен обзор наиболее эффективных моделей и методов для задач упаковки кругов и шаров. Метод перехода от одного локального минимума задачи к другому предложен в [7]. В указанной работе выбираются радиусы пары кругов, которые являются переменными и могут привести к уменьшению длины прямоугольника.

В нашей работе предполагается, что радиусы всех кругов являются переменными одновременно. Такой подход позволяет свести решение поставленной задачи к решению ряда подзадач математического программирования и разработать новый алгоритм перехода от одного локального минимума задачи к другому, при котором длина прямоугольника уменьшается. Это дало возможность улучшить большую часть известных тестовых примеров, представленных в [4, 5].

Рассмотрим круги $C_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 - (\widehat{r}_i)^2 \leqslant 0\}$, где $\mathbf{u}_i = (x_i, y_i)$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, и прямоугольный контейнер $P(l) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant w\}$, где l — переменная. Не теряя общности, полагаем

$$\widehat{r}_1 \leqslant \widehat{r}_2 \leqslant \ldots \leqslant \widehat{r}_n. \qquad (1)$$

Очевидно, что в системе неравенств (1) имеется, по крайней мере, одно строгое неравенство $\widehat{r}_i < \widehat{r}_{i+1}$.

Вектор $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ определяет местоположение всех кругов C_i, $i \in I$. В последующем круг C_i, транслированный на вектор $\mathbf{u}_i$, обозначается как $C_i(\mathbf{u}_i)$.

Задача. Определить вектор $\mathbf{u}$, гарантирующий размещение кругов $C_i(\mathbf{u}_i)$, $i \in I$, без взаимных пересечений в $P(l)$ и такой, что длина l достигает минимума l^*.

Математическую модель задачи можно представить следующим образом:

$$l^* = \min l \tag{2}$$

при условии, что $Y = (\mathbf{u}, l) \in W \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, где

$$W = \{Y \in \mathbb{R}^{2n+1} \colon \Phi_{ij}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (\widehat{r}_i + \widehat{r}_j)^2 \geqslant 0,\ 0 < i < j \in I,$$
$$\Phi_i(\mathbf{u}_i, l) = \min\{x_i - \widehat{r}_i, l - (x_i + \widehat{r}_i), y_i - \widehat{r}, w - (y_i + \widehat{r}_i)\} \geqslant 0,\ i \in I\}. \tag{3}$$

Задача (2), (3) является NP-трудной. Для успешного ее решения предлагается следующая стратегия:

1) построение начальных точек;

2) вычисление локальных минимумов;

3) переход от одного локального минимума к другому для получения хорошего приближения к глобальному минимуму.

Рассмотрим эти этапы подробнее.

Выберем длину прямоугольника $l = l^s$, гарантирующую размещение кругов C_i радиусом $\widehat{r}_i$, $i \in I$, в прямоугольнике $P(l^s)$. Пусть радиусы r_i кругов C_i, $i \in I$, являются переменными и формируют вектор $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathbf{X} = (\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{3n}$ — вектор всех переменных. В дальнейшем круг C_i радиусом r_i, транслированный на вектор $\mathbf{u}_i$, обозначается как $C_i(\mathbf{u}_i, r_i)$.

Выберем точку $\mathbf{X}^{\vartriangle} = (\mathrm{u}^{\vartriangle}, 0) = (\mathrm{u}^{\vartriangle}, 0, \ldots, 0)$, где $\mathbf{u}^{\vartriangle}$ выбирается случайно, так что $\mathbf{u}_i \in P(l^s)$, $i \in I$. Взяв $\mathbf{X}^{\vartriangle}$ в качестве начальной точки, решаем задачу

$$F(\widetilde{\mathbf{r}}) = \max F(\mathbf{r}) = \max \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{4}$$

при условии, что

$$\mathbf{X} \in D \subset \mathbb{R}^{3n},$$

где

$$D = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3n} \colon \Phi_{ij}^r(\mathrm{u}_i, \mathrm{u}_j, r_i, r_j) \geqslant 0,\ 0 < i < j \in I,\ \Phi_i^r(\mathrm{u}_i, r_i) \geqslant 0,$$
$$\varphi_i(r_i) = \widehat{r}_i - r_i \geqslant 0,\ r_i \geqslant 0,\ i \in I\}. \tag{5}$$

Очевидно $\mathbf{X}^{\vartriangle} \in D$. В результате решения этой задачи получаем точку локального максимума $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{r}})$.

Задача (4), (5) имеет свойства задачи (2), (3), а также следующие дополнительные особенности:

1) из неравенств $\varphi_i(r_i) \geqslant 0$, $i \in I$, в (5) следует, что если $F(\widetilde{\mathbf{r}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{r}_i = d$, где $d = \sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{r}_i$ в точке локального максимума $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{r}})$, то круги $C_i(\widetilde{\mathbf{u}}_i, \widetilde{r}_i) = C_i(\widetilde{\mathbf{u}}_i, \widehat{r}_i)$, $i \in I$, размещаются в прямоугольнике $P(l^s)$, т. е. $\widetilde{\mathbf{X}}$ — точка глобального максимума задачи (4), (5);

2) если точка глобального максимума $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{r}})$ такая, что по крайней мере один из радиусов $\widetilde{r}_i < \widehat{r}_i$, то круги $C_i(\widetilde{\mathbf{u}}_i, \widetilde{r}_i)$, $i \in I$, не могут быть размещены в прямоугольнике $P(l^s)$.

Пусть $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{r}})$ — решение задачи (4), (5) и $F(\widetilde{\mathbf{r}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{r}_i = d$. Взяв начальную точку $(\widetilde{\mathbf{u}}, l^s)$, решаем задачу (2), (3). В результате получаем точку локального минимума $(\mathbf{u}^*, l^*)$.

Перейдем теперь к общей схеме решения.

Пусть $(\mathbf{u}^*, l^*)$ — точка локального минимума задачи (2), (3). Возьмем

$$l^k = l^* - \left(\frac{1}{2}\right)^k b, \qquad b > 0, \qquad k \in K = \{0, 1, 2, \ldots, \alpha < \infty\}. \tag{6}$$

Очевидно, что $(\mathbf{u}^*, l^k) \notin W$, поскольку некоторые неравенства вида $\Phi_i(\mathbf{u}_i, l^k) \geqslant 0$, $i \in I$, не выполняются в точке $(\mathbf{u}^*, l^k)$. Поэтому построим точку $(\eta^k, \mathbf{X}) = (\eta^k, \mathbf{u}^*, \widetilde{\mathbf{r}}) \in \mathbb{R}^{3n+1}$, где

$$\eta^k = \min\{\Phi_i(\mathbf{u}_i^*, \widehat{r}_i, l^k),\ i \in I\}, \tag{7}$$

и взяв $(\eta^k, \mathbf{X})$ в качестве начальной точки, решаем задачу:

$$\eta^* = \max \eta \tag{8}$$

при условии, что

$$(\eta, \mathbf{X}) \in G \subset \mathbb{R}^{3n+1},$$

где

$$\begin{gathered}
G = \{(\eta, \mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{3n+1} \colon \Phi_{ij}^r(\mathrm{u}_i, \mathrm{u}_j, r_i, r_j) - \eta \geqslant 0,\ 0 < i < j \in I, \\
\Phi_i^r(\mathbf{u}_i, r_i) - \eta = \min\{x_i - r_i, l - (x_i + r_i), y_i - r_i, w - (y_i + r_i)\} - \eta \geqslant 0, \\
\widehat{r}_i - r_i - \eta \geqslant 0,\ r_i \geqslant 0,\ i \in I,\ -\eta \geqslant 0\}, \\
\Phi_{ij}^r(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, r_i, r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2.
\end{gathered} \tag{9}$$

В результате решения получаем точку $(\eta^{*k}, \mathbf{X}^{*k}) = (0, \mathbf{X}^{*k})$.

Отметим, что в силу неравенств $\widehat{r}_i - r_i - \eta \geqslant 0$, $-\eta \geqslant 0$, $i \in I$, глобальный максимум $\eta^* = 0$ задачи (8), (9) всегда существует.

Пусть $(0, \mathbf{X}^{*k})$ — точка глобального максимума задачи (8), (9). Это означает, что $\mathbf{X}^{*k} \in D$ (5). Поэтому, взяв $\mathbf{X}^{*k}$ в качестве начальной точки, решаем задачу (4), (5). Пусть $\widetilde{\mathbf{X}}^k = (\widetilde{\mathbf{u}}^k, \widetilde{\mathbf{r}}^k)$ — точка локального максимума задачи (4), (5).

Возможны два случая: 1) $F(\widetilde{\mathbf{r}}^k) = d$; 2) $F(\widetilde{\mathbf{r}}^k) < d$.

Пусть $F(\widetilde{\mathbf{r}}^k) = d$ и $k = 0$ в (6), т. е. $\widetilde{\mathbf{X}}^k = \widetilde{\mathbf{X}}^0$. Из равенства $F(\widetilde{\mathbf{r}}) = d$ следует, что $\widetilde{\mathbf{X}}^0 = (\widetilde{\mathbf{u}}^0, \widetilde{\mathbf{r}}^0)$, где $\widetilde{\mathbf{r}}^0 = \widehat{\mathbf{r}}$ — точка глобального максимума задачи (4), (5) и $(\widetilde{\mathbf{u}}^0, l^0) \in W$. Взяв $(\widetilde{\mathbf{u}}^0, l^0)$ в качестве начальной точки и решив задачу (2), (3), получаем точку локального минимума $(\mathbf{u}^*, l^*)$. После этого, взяв $k = 0$ в (6), формируем новую точку $(\eta^0, \mathbf{X}^0) = (\eta^0, \mathbf{u}^*, l^0) \in G$ (9) и решаем последовательно задачи (8), (9); (4), (5) и (2), (3). В результате получаем точку локального минимума $(\mathbf{u}^*, l^*)$ задачи (2), (3). Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $F(\widetilde{\mathbf{r}}^0) < d$. В этом случае мы выполняем специальный алгоритм перехода к другому локальному минимуму задачи (2), (3), изложенный ниже. Если не удалось получить $F(\widetilde{\mathbf{r}}^k) = d$, увеличиваем k на 1 в (6) и вычисляем l^{k+1} и η^{k+1} (см. (7)). Затем строится точка $(\eta^{k+1}, \mathbf{X}^{k+1}) \in G$ (9) и последовательно решаются задачи (8), (9); (4), (5) и (2), (3) и т. д., пока не будет выполнено либо равенство $F(\widetilde{\mathbf{r}}^{k+1}) = d$, либо неравенство $(1/2)^{k+1}b < \varepsilon > 0$, где ε — точность решения.

Если $F(\widetilde{\mathbf{r}}^{k+1}) = d$, то взяв в (6) $k = 0$, формируем новую точку $(\eta^0, \mathbf{X}^0) = (\eta^0, \widetilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \widetilde{\mathbf{r}}^{k+1}) = (\eta^0, \widetilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \widehat{\mathbf{r}}) \in G$ (9) и решаем последовательно задачи (8), (9); (4), (5) и (2), (3) и т. д.

Если же $(1/2)^{k+1}b < \varepsilon$, то либо вычисляем новую точку $\mathbf{X}^{\triangle}$ (см. (4), (5) и решаем последовательно задачи (4), (5) и (2), (3), либо выбираем точку $(\mathbf{u}^*, l^*)$ в качестве приближения к точке глобального минимума задачи (2), (3).

Если $F(\widetilde{\mathbf{r}}^k) < d$, то выполняем переход от точки локального максимума $\widetilde{\mathbf{X}}^k$ к другой $\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}} = (\widetilde{\widetilde{\mathbf{u}}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}})$, так что $F(\widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}}) > F(\widetilde{\mathbf{r}}^k)$. Процесс продолжается, пока либо $F(\widetilde{\mathbf{r}}) = d$, либо $(1/2)^k b < \varepsilon$.

Для решения задач нелинейного программирования (2), (3); (4), (5) и (8), (9) выбран пакет Interior Point Optimizer (IPOPT) [8], в котором используется информация о градиентах и гессианах, и концепция ε-active неравенств [9].

Рассмотрим способ перехода от одного локального максимума задачи (4), (5) к другому.

Пусть $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{r}})$ — точка локального максимума задачи (4), (5) и $F(\widetilde{\mathbf{r}}) < d$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\max \Gamma(\mathbf{r}) = \max \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \tag{10}$$

при условии, что $\mathbf{X} = (\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in M \supset D \subset \mathbb{R}^{3n}$,

$$\begin{aligned} M = \{&\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3n},\ \Phi_{ij}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, r_i, r_j) \geqslant 0,\ 0 < i < j \in I,\ \Phi_i^r(\mathbf{u}_i, r_i) \geqslant 0, \\ &\psi_{1i}(r_i) = \widehat{r}_{i_n} - r_i \geqslant 0,\ \psi_{2i}(r_i) = r_i - \widehat{r}_{i_1} \geqslant 0,\ i \in I\}, \end{aligned} \tag{11}$$

т. е. ограничения $\varphi_i(r_i) \geqslant 0$, $r_i \geqslant 0$, $i \in I$, задачи (4), (5) заменяются неравенствами $\psi_{1i}(r_i) \geqslant 0$, $\psi_{2i}(r_i) \geqslant 0$, $i \in I$, а линейная функция цели $F(\mathbf{r})$ — квадратичной $\Gamma(\mathbf{r})$. Таким образом, переменные r_i, $i \in I$, не могут быть меньше минимального $\widehat{r}_1$ и больше максимального $\widehat{r}_n$ исходного радиуса. Это означает, что некоторые неравенства $\varphi_i(r_i) \geqslant 0$, $i \in I$, могут не выполняться.

Вычислим вектор наискорейшего подъема $\mathbf{Y}^0$ в точке $\widetilde{\mathbf{X}}$ для задачи (10), (11) и построим точку

$$\mathbf{X}^{\nu} = \widetilde{\mathbf{X}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \mathbf{Y}^0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Замечание 1. В силу отношения (12) имеем $\Gamma(\mathbf{r}^{\nu}) > \Gamma(\widetilde{\mathbf{r}})$ для любого ν. Это позволяет определить такое m, что если $v \geqslant m$, то $\mathbf{X}^v \neq \widetilde{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{X}^{\nu} \in M$, т. е. $C_i(\mathbf{u}_i^{\nu}, r_i^{\nu})$, $i \in I$, не пересекаются и $C_i(\mathbf{u}_i^{\nu}, r_i^{\nu}) \subset P(l^0)$, $i \in I$.

Замечание 2. Может оказаться, что $\Gamma(\mathbf{r}^{\nu}) > \Gamma(\widehat{\mathbf{r}})$.

Из (12) следует, что $r_i^{\nu} = \widetilde{r}_i + (1/2)^{\nu-1} y_i^0$, $i \in I$. Так как вектор $\mathbf{Y}^0$ вычисляется для задачи (10), (11), то $r_i \in [\widehat{r}_1, \widehat{r}_n]$, $i \in I$. Следовательно, в общем случае $\mathbf{X}^{\nu} \notin D$.

Таким образом, для части координат вектора $\mathbf{X}^{\nu}$ имеем $r_i^{\nu} \geqslant \widetilde{r}_i$, $i \in I_1 \subset I$, а для оставшейся части — $r_j^{\nu} < \widetilde{r}_j$, $j \in I_2 \subset I$. Предположим, что множество I_1 состоит из q элементов, а множество I_2 — из p элементов, т. е. $n = q + p$, $I_1 \bigcap I_2 = \varnothing$ и $I_1 \bigcup I_2 = I$.

Пусть $\nu = m$. Построим вектор $\breve{\mathbf{X}}^{0m} = (\breve{\mathbf{u}}_1^{0m}, \breve{\mathbf{u}}_2^{0m}, \ldots, \breve{\mathbf{u}}_n^{0m}, \breve{r}_1^{0m}, \breve{r}_2^{0m}, \ldots, \breve{r}_n^{0m})$ на основе точек $\widetilde{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{X}^m$ следующим образом.

Пусть $r_i^m > \widetilde{r}_i$ и $r_j^m < \widetilde{r}_j$. Если выполняются неравенства

$$\widetilde{r}_i < r_j^m, \qquad \widetilde{r}_j < r_i^m, \tag{13}$$

то координаты $\breve{r}_j^{0m}$, $\breve{r}_i^{0m}$, $\breve{\mathbf{u}}_j^{0m}$ и $\breve{\mathbf{u}}_i^{0m}$ точки $\breve{\mathbf{X}}^{0m}$ принимают вид

$$\begin{aligned} &\breve{r}_i^{0m} = \min\{r_i^m, \widehat{r}_j\}, \qquad \breve{\mathbf{u}}_i^{0m} = \mathbf{u}_j^m,\\ &\breve{r}_j^{0m} = \min\{r_j^m, \widehat{r}_i\}, \qquad \breve{\mathbf{u}}_j^{0m} = \mathbf{u}_i^m. \end{aligned} \tag{14}$$

Если не существует i, такое, что выполняются неравенства (13), то берем

$$\breve{r}_j^{0m} = r_j^m, \qquad \breve{\mathbf{u}}_j^{0m} = \mathbf{u}_j^m. \tag{15}$$

Если компоненты r_i^m и $\mathbf{u}_i^m$ не принимают участие в построении (14), то берем

$$\breve{r}_i^{0m} = r_i^m, \qquad \breve{\mathbf{u}}_i^{0m} = \mathbf{u}_i^m. \tag{16}$$

Существует целое число N, такое, что если $v > N$, то $\breve{\mathbf{X}}^{0v} = \mathbf{X}^v$.

Теорема. *Пусть* $\widetilde{\widetilde{\mathbf{X}}} = (\widetilde{\widetilde{\mathbf{u}}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}})$ *— точка локального максимума, полученная из начальной точки* $\breve{\mathbf{X}}^{0m}$*. Если* $m \leqslant N$*, то* $\Gamma(\widetilde{\widetilde{\mathbf{r}}}) > \Gamma(\widetilde{\mathbf{r}})$.

Таким образом, если условия теоремы выполняются, то точка $\breve{\mathbf{X}}^{0m} \neq \mathbf{X}^m$ и отличается от точки $\widetilde{\mathbf{X}}$ порядком компонент, соответствующих кругам C_j, $j \in I$.

На основе теоремы предлагается следующий алгоритм перехода от одного локального минимума к другому. Пусть $\nu = m$ и $(\mathbf{u}^{*0}, l^{*0})$ — точка локального минимума задачи (2), (3). Мы выбираем $l = l^0 = l^{*0} - b$ (см. (10)) и строим точку $\mathbf{X}^{\square} = (\mathrm{u}^{*0}, \widehat{\mathrm{r}})$. Очевидно, что $\mathbf{X}^{\square} \notin D$ (см. (4), (5)) вследствие неравенств вида $\Phi_i(r_i, \mathbf{u}_i, l^0) \geqslant 0$, $i \in I$. Поэтому, взяв начальную точку $(\eta^0, \mathbf{X}^{\square})$ (см. (7)), решаем задачу (8), (9). В результате решения получаем точку глобального максимума $(0, \mathbf{X}^0)$. Взяв начальную точку $\mathbf{X}^0$, вычисляем точку локального максимума $\widetilde{\mathbf{X}}$ задачи (4), (5).

Пусть $F(\widetilde{\mathbf{r}}) < d$, т.е. круги $C_i(\widetilde{\mathbf{u}}_i, \widetilde{r}_i)$, $i \in I$, не размещаются в прямоугольнике $P(l^0)$. Вычисляем вектор наискорейшего подъема $\mathbf{Y}^0$ в точке $\widetilde{\mathbf{X}}$ для задачи (10), (11) и строим вектор $\breve{\mathbf{X}}^{0m}$ в соответствии с отношениями (13), (14). Для того чтобы учесть замечание 2, введем функцию

$$\mathrm{T}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} (\min(r_i, \widehat{r}_i))^2 \tag{17}$$

и обозначим $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{r}_i^2$.

Если $\mathrm{T}(\breve{\mathbf{r}}^{0m}) > \mathrm{T}(\widetilde{\mathbf{r}})$ и $\mathrm{T}(\breve{\mathbf{r}}^{0m}) < \sigma$, расположим радиусы $\breve{r}_i^{0m}$, $i \in I$, в возрастающем порядке (см. (1))

$$\breve{r}_{j_1}^{0m} \leqslant \breve{r}_{j_2}^{0m} \leqslant \cdots \leqslant \breve{r}_{j_n}^{0m} \tag{18}$$

и перенумеруем круги $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_n}$ в соответствии с системой неравенств (1). В результате круги имеют другие номера $1, 2, \ldots, n$. Затем строим новую точку $\breve{\mathbf{X}}^{0m}$, учитывая эти

Таблица 1. Результаты для третьей группы примеров

Пример	n	w	l^*	Плотность упаковки, %
SY36	125	19	**42,5946**	88,23
SY125	150	20	**40,2342**	88,34
Y1236	175	20	**54,1324**	88,26
SY356	225	19	**70,2894**	88,60
SY1256	250	19	**78,1337**	88,56
SY12356	275	22	**72,9074**	88,83
SY565	300	25	**69,4508**	88,83

новые номера. После этого вычисляется новый вектор наискорейшего подъема $\mathbf{Y}^0$ в новой точке $\check{\mathbf{X}}^{0m}$ для задачи (10), (11) и опять строится точка $\check{\mathbf{X}}^{0m}$ в соответствии с отношениями (13), (16) и т. д. Каждый раз радиусы $\check{r}_i^{0m}$, $i \in I$, располагаются в возрастающем порядке (18) и перенумеровываются в соответствии с соотношением (1). Процесс продолжается, пока не выполнится неравенство $\|\mathbf{Y}^0\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — точность решения задачи.

Если радиусы кругов больше, чем исходные значения $\widehat{r}_i$, $i \in I$, то строим точку

$$\check{\check{\mathbf{X}}}^{0m} = (\check{\mathbf{u}}_1^{0m}, \check{\mathbf{u}}_2^{0m}, \ldots, \check{\mathbf{u}}_n^{0m}, \min(r_1^{0m}, \widehat{r}_1), \min(r_2^{0m}, \widehat{r}_2), \ldots, \min(r_n^{0m}, \widehat{r}_n)) \in D.$$

Если $\mathrm{T}(\check{\mathbf{r}}^{0m}) = \sigma$ (см. (17)), то $\check{\check{\mathbf{X}}}^{0m}$ является точкой глобального максимума задачи (4), (5). Взяв начальную точку $(\check{\check{\mathbf{u}}}^{0m}, l^0) \in W$, решаем задачу (2), (3) и т. д.

Если $\mathrm{T}(\check{\mathbf{r}}^{0m}) < \sigma$, то взяв начальную точку $\check{\check{\mathbf{X}}}^{0m}$, решаем задачу (4), (5). Пусть $\widetilde{\mathbf{X}}^{0m}$ — решение задачи (4), (5). Если $F(\widetilde{\mathbf{r}}^{0m}) = d$, то $\widetilde{\mathbf{X}}^{0m}$ является точкой глобального максимума задачи (4), (5). Взяв начальную точку $(\widetilde{\mathbf{u}}^{0m},\ l^0) \in W$, решаем задачу (2), (3) и т. д.

Если $\mathrm{T}(\check{\mathbf{r}}^{0m}) \leqslant \mathrm{T}(\widetilde{\mathbf{r}})$ или $F(\widetilde{\mathbf{r}}^{0m}) < d$, то полученный результат выбирается в качестве приближения к глобальному минимуму задачи (2), (3).

Рассмотрим три группы примеров. Первая группа состоит из 128 тестовых примеров, введенных и вычисленных в работе [4]. Во вторую группу входит 18 примеров, протестированных в [5]. Третью группу составляют 7 новых примеров для большего количества кругов. В 138 примерах, входящих в первую и вторую группы, получены лучшие результаты. Результаты решения всех примеров приведены на странице: http://uploaders.com.ua/pfiles/12413/SY+KBG.doc (результаты, полученные для последней группы примеров, приведены в табл. 6).

1. *Castillo I., Kampas F. J., Pinter J. D.* Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications // Europ. J. of Operational Research. – 2008. – **191**. – P. 786–802.
2. *Рвачев В. Л., Стоян Ю. Г.* Алгоритм решения задачи оптимального раскроя с круговыми выкройками при наличии ограничений на расстояния между парами выкроек // Кибернетика. – 1965. – **№ 3**. – С. 73–83.
3. *Huang W. Q., Li Y., Akeb H., Li C. M.* Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container // J. of the Operational Research Society. – 2005. – **56**, No 5. – P. 539–548.
4. *Kubach T., Bortfeldt A., Gehring H.* Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle // Central Europ. J. of Operations Research. – 2009. – **17**, No 4. – P. 461–477.
5. *Akeb H., Hifi M., Negre S.* An augmented beam search-based algorithm for the circular open dimension problem // Computers & Industrial Engineering. – 2011. – **61**, No 2. – P. 373–381.
6. *Hifi M., M'Hallah R.*. A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies // Advances in Operations Research. – 2009. – **2009**. – 150624, 22 p.

7. *Stoyan Yu. G., Yaskov G. N.* A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip // Europ. J. of Operational Research. – 2004. – **156**. – P. 590–600.
8. *Wachter A., Biegler L. T.* On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming // Math. Programming. – 2006. – **106**, No 1. – P. 25–57.
9. *Stoyan Yu., Yaskov G.* Packing congruent hyperspheres into a hypersphere // J. of Global Optimization. – 2012. – **52**, No 4. – P. 855–868.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 30.07.2012

Член-кореспондент НАН України **Ю. Г. Стоян, Г. М. Яськов**

Перехід від одного локального мінімуму до іншого в задачі пакування нерівних кругів у смузі мінімальної довжини

Розглядається задача пакування нерівних кругів у прямокутник заданої ширини та мінімальної довжини. На основі ідеї збільшення розмірності простору розв'язків будується математична модель задачі та досліджуються її властивості. Стратегія розв'язання задачі включає побудову вихідних точок, обчислення локальних мінімумів, збільшення розмірності простору розв'язків задачі та перехід від одного локального мінімуму до іншого, що забезпечує зменшення довжини прямокутника. Обчислено 146 відомих тестових прикладів та 7 нових.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, G. N. Yaskov**

Transition from one local minimum to another one in the problem of packing of non-equal circles into a strip of minimal length

The packing of non-equal circles into a rectangle of given width and minimal length is considered. Based on the idea of increasing the problem dimension, we construct a mathematical model of the problem and its characteristics. A solution strategy involves the construction of starting points, calculation of local minima, increase of the dimension of the space of solutions of the problem, and the transition from one local minimum to another one such that the rectangle length decreases. 146 known benchmark instances and 7 new ones are calculated.