ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2013

МЕХАНІКА

УДК 519.81:681.51

Член-корреспондент НАН Украины **М. Д. Борисюк,**
Т. Е. Александрова, А. С. Мазманишвили

Стохастическая оценка плавности хода многоопорного транспортного средства

Предложена стохастическая оценка плавности хода многоопорного транспортного средства путем пространственного моделирования случайной поверхности движения в виде нормального марковского двумерного поля с заданными стохастическими характеристиками и последующей оценкой вертикальных, продольно-угловых и поперечно-угловых случайных колебаний подрессоренной части транспортного средства.

Для стохастической оценки плавности хода многоопорного транспортного средства (ТС) необходимо решить задачу пространственного моделирования двумерного поля на плоской поверхности с заданными стохастическими характеристиками. Из всего многообразия возможных вариантов и моделей двумерных случайных поверхностей наиболее предпочтительным является нормальное марковское двумерное поле (НМД-поле), поскольку этот объект удобен для анализа и любое его ортогональное сечение суть стационарный процесс Орнштейна–Уленбека [1].

Рассмотрим три системы координат, представленные на рис. 1: неподвижную OXY; подвижную $O_nX_nY_n$, начало которой связано с центром масс подрессоренной части ТС, а оси параллельны осям неподвижной системы; связанную $O_cX_cY_c$, начало которой связано с центром масс подрессоренной части ТС, а оси O_cX_c и O_cY_c совпадают с главными центральными осями инерции подрессоренной части.

Координаты точек контакта опорных катков с поверхностью грунта обозначим x_{ir}, y_{ir} по правому борту и x_{il}, y_{il} — по левому, где i — номер опорного катка при начале отсчета от переднего катка. Расстояния l_i в горизонтальной плоскости от точки контакта i-го опорного катка до поперечной связанной оси O_cY_c положительны для катков, расположенных впереди центра масс, и отрицательны для катков, расположенных сзади центра масс. Расстояние S_i в горизонтальной плоскости от центра масс подрессоренной части ТС до точки контакта i-го опорного катка с грунтом определяется соотношениями

$$S_i = \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + l_i^2}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где B — ширина колеи ТС; n — число опорных катков по одному из бортов.

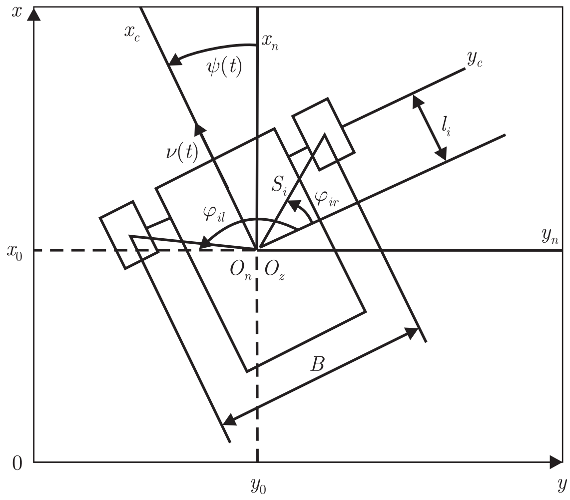

Рис. 1. Системы координат

Углы φ_{ir} и φ_{il} составляют

$$\varphi_{ir} = \operatorname{arctg}\frac{2l_i}{B}, \qquad \varphi_{il} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{2l_i}{B}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Криволинейное перемещение ТС характеризуется текущей скоростью движения центра масс $V(t)$ и текущим углом поворота корпуса $\psi(t)$, при этом координаты центра масс изменяются в соответствии с формулами

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t V(t)\cos\psi(t)\,dt; \qquad y(t) = y_0 - \int\limits_0^t V(t)\sin\psi(t)\,dt, \tag{3}$$

где x_0, y_0 — координаты начальной точки отсчета.

Исходя из рис. 1, можно записать соотношения для текущих координат точек контакта катков правого и левого бортов в процессе криволинейного движения ТС:

$$x_{ir}(t) = x(t) + S_i\sin\left[\psi(t) + \operatorname{arctg}\frac{2l_i}{B}\right], \qquad i = \overline{1,n}; \tag{4}$$

$$y_{ir}(t) = x(t) + S_i\cos\left[\psi(t) + \operatorname{arctg}\frac{2l_i}{B}\right], \qquad i = \overline{1,n}; \tag{5}$$

$$x_{il}(t) = x(t) + S_i\sin\left[\psi(t) + \pi - \operatorname{arctg}\frac{2l_i}{B}\right], \qquad i = \overline{1,n}; \tag{6}$$

$$y_{il}(t) = x(t) + S_i\cos\left[\psi(t) + \pi - \operatorname{arctg}\frac{2l_i}{B}\right], \qquad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Поверхность грунта, по которому происходит криволинейное движение ТС, характеризуется пространственными неровностями, иными словами, представляет собой поле $H(x, y)$, которое в каждой фиксированной точке (x_*, y_*) имеет высоту неровности $h(x_*, y_*)$.

Случайное поле $H_1(x,y)$ в прямоугольнике $\{x \in [0,a], y \in [0,b]\}$ можно описать уравнением Ланжевена для процесса Орнштейна–Уленбека [2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \nu_y\right) h(x,y) = \sigma u(x,y), \tag{8}$$

где $u(x,y)$ — случайное поле, обладающее свойствами гауссовского двумерного "белого" шума единичной интенсивности.

В качестве граничных условий в (14) используем два нормальных стохастических процесса, описываемых уравнениями Ланжевена

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \nu_x\right) h(x,0) = \sigma u(x,0), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \nu_y\right) h(0,y) = \sigma u(0,y) \tag{9}$$

и реализующихся вдоль осей x и y с начальным условием

$$h(0,0) = \sigma u(0,0). \tag{10}$$

Решения уравнения (8) с условиями (9) и (10) следующие:

$$h(x,0) = \exp(-\nu_x x) h(0,0) + \sigma \int\limits_0^x \exp[-\nu_x(x - x')] u(x',0)\, dx', \tag{11}$$

$$h(0,y) = \exp(-\nu_y y) h(0,0) + \sigma \int\limits_0^y \exp[-\nu_y(y - y')]\, u(0,y')\, dy', \tag{12}$$

$$\begin{aligned} h(x,y) = {} & \exp(-\nu_x x - \nu_y y) h(0,0) + \sqrt{2\nu_x}\sigma \int\limits_0^x \exp[-\nu_x(x - x')] u(x',0)\, dx' + \\ & + \sqrt{2\nu_y}\sigma \int\limits_0^x \exp[-\nu_y(y - y')] u(0,y')\, dy' + \\ & + \sqrt{4\nu_x\nu_y}\sigma \int\limits_0^x\int\limits_0^y \exp[-\nu_x(x - x') - \nu_y(y - y')] u(x',y')\, dx'dy'. \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение (8) вместе с решением (11)–(13) описывает НМД-поле первого порядка $H_1(x,y)$, порождающим полем для которого является поле "белого" шума $u(x,y)$.

Случайное НМД-поле второго порядка $H_2(x,y)$ в прямоугольнике $\{x \in [0,a], y \in [0,b]\}$ можно описать уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_x^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\beta_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_y^2\right) h(x,y) = \sigma u(x,y), \tag{14}$$

где β_x, Ω_x и β_y, Ω_y — парциальные декременты и частоты, отвечающие движению по осям x и y соответственно.

Пусть $\gamma_{1,x}$, $\gamma_{2,x}$, а также $\gamma_{1,y}$, $\gamma_{2,y}$ — решения уравнений $\gamma^2 + 2\beta_x\gamma + \Omega_x^2 = 0$, $\gamma^2 + 2\beta_y\gamma + \Omega_y^2 = 0$. Тогда (14) можно записать в виде системы из двух уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{1,x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{1,y}\right)h_1(x,y) = \sigma u(x,y), \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{2,x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{2,y}\right)h_2(x,y) = h_1(x,y). \tag{16}$$

Структуры уравнений (15), (16) и (8) совпадают, следовательно, решения системы (15), (16) в соответствии с (11)–(13) записываются в виде

$$h_1(x,0) = \exp(-\gamma_{1,x}x)h_1(0,0) + \sigma\int\limits_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x-x')]u(x',0)\,dx', \tag{17}$$

$$h_1(0,y) = \exp(-\gamma_{1,y}y)h_1(0,0) + \sigma\int\limits_0^y \exp[-\gamma_{1,y}(y-y')]u(0,y')\,dy', \tag{18}$$

$$\begin{aligned} h_1(x,y) = {} & \exp(-\gamma_{1,x}x - \gamma_{1,y}y)h_1(0,0) + \sqrt{2\gamma_{1,x}}\sigma\int\limits_0^x \exp[-\gamma_{1,x}(x-x')]u(x',0)\,dx' + \\ & + \sqrt{2\gamma_{1,y}}\sigma\int\limits_0^x \exp[-\gamma_{1,y}(y-y')]u(0,y')\,dy' + \\ & + \sqrt{4\gamma_{1,x}\gamma_{1,y}}\sigma\int\limits_0^x\int\limits_0^y \exp[-\gamma_{1,x}(x-x') - \gamma_{1,y}(y-y')]u(x',y')\,dx'dy', \end{aligned} \tag{19}$$

а также

$$h_2(x,0) = \exp(-\gamma_{2,x}x)h_1(0,0) + \int\limits_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x-x')]h_1(x',0)\,dx', \tag{20}$$

$$h_2(0,y) = \exp(-\gamma_{2,y}y)h_1(0,0) + \int\limits_0^y \exp[-\gamma_{2,y}(y-y')]h_1(0,y')\,dy', \tag{21}$$

$$\begin{aligned} h_2(x,y) = {} & \exp(-\gamma_{2,x}x - \gamma_{2,y}y)h(0,0) + \sqrt{2\gamma_{2,x}}\sigma\int\limits_0^x \exp[-\gamma_{2,x}(x-x')]h_1(x',0)\,dx' + \\ & + \sqrt{2\gamma_{2,y}}\int\limits_0^x \exp[-\gamma_{2,y}(y-y')]h_1(0,y')\,dy' + \\ & + \sqrt{4\gamma_{2,x}\gamma_{2,y}}\int\limits_0^x\int\limits_0^y \exp[-\gamma_{2,x}(x-x') - \gamma_{2,y}(y-y')]h_1(x',y')\,dx'dy'. \end{aligned} \tag{22}$$

Из соотношений (17)–(22) следует, что для НМД-поля второго порядка $H_2(x, y)$ производящим является НМД-поле $H_1(x, y)$ первого порядка, а для НМД-поля $H_1(x, y)$ первого порядка производящим является поле "белого" шума $H_0(x, y) = u(x, y)$ нулевого порядка. При решении практических задач, связанных с определением возмущений, действующих на подрессоренную часть корпуса ТС со стороны грунта, требуется не только знание случайной функции двух переменных $h(x, y) = h_2(x, y)$, но и ее производной по времени

$$\dot{h}(x, y) = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y}\dot{y}(t). \tag{23}$$

Для описания величин $h(x_{ir}, y_{ir})$, $h(x_{il}, y_{il})$, $\dot{h}(x_{ir}, y_{ir})$, $\dot{h}(x_{il}, y_{il})$ $(i = \overline{1, n})$ в формулы (17)–(22) следует подставить соотношения (3)–(7).

В табл. 1 подставлены значения констант уравнения Ланжевена (14) для различных типов грунтов в предположении, что стохастические свойства НМД-поля одинаковы в направлениях Ox и Oy.

Уравнения возмущенного движения подрессоренной части корпуса (ПЧК) ТС получены в работе [3] и имеют следующий вид:

$$\frac{G}{g}\ddot{z}(t) + 2q\delta\dot{z}(t) + 2ncz(t) + \delta\sum_{j=1}^{2q}\mu_j\dot{\varphi}(t) + c\sum_{i=1}^{2n}\mu_i\varphi(t) =$$
$$= c\sum_{i=1}^{n}[h(x_{ir}, y_{ir}) + h(x_{il}, y_{il})] + \delta\sum_{j=1}^{q}[\dot{h}(x_{ir}, y_{ir}) + \dot{h}(x_{il}, y_{il})]; \tag{24}$$

$$J_y\ddot{\varphi}(t) + q\sum_{j=1}^{2q}\mu_j^2\dot{\varphi}(t) + c\sum_{i=1}^{2n}\nu_i^2\varphi(t) + \delta\sum_{j=1}^{2q}\mu_j\dot{z}(t) + c\sum_{i=1}^{2n}\nu_i z(t) =$$
$$= c\sum_{i=1}^{n}\nu_i[h(x_{ir}, y_{ir}) + h(x_{il}, y_{il})] + \delta\sum_{j=1}^{q}\mu_j[\dot{h}(x_{ir}, y_{ir}) + \dot{h}(x_{il}, y_{il})]; \tag{25}$$

$$J_x\ddot{\vartheta}(t) + \frac{q\delta B^2}{2}\dot{\vartheta}(t) + \frac{qcB^2}{2}\vartheta(t) = \frac{cB}{2}\sum_{i=1}^{n}[h(x_{ir}, y_{ir}) - h(x_{il}, y_{il})] +$$
$$+ \frac{\delta B}{2}\sum_{j=1}^{q}\mu_j[\dot{h}(x_{ir}, y_{ir}) - \dot{h}(x_{il}, y_{il})] - \frac{G}{g}V(t)\dot{\psi}(t)[h_0 + z_k(t)]\operatorname{sign}\dot{\psi}(t), \tag{26}$$

где $z(t)$, $\dot{z}(t)$ — обобщенная координата и обобщенная скорость вертикальных колебаний центра масс ПЧК ТС; $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ — обобщенная координата и обобщенная скорость продольно-угловых колебаний ПЧК ТС; $\vartheta(t)$, $\dot{\vartheta}(t)$ — обобщенная координата и обобщенная

Таблица 1. Константы уравнения Ланжевена для различных типов грунтов

Тип поверхности движения	δ, м$^{-1}$	Ω, м$^{-1}$	σ, м
Асфальтобетон	0,191	0,444	0,012
Мостовая	0,105	0,669	0,024
Грунтовая дорога	0,337	1,065	0,105

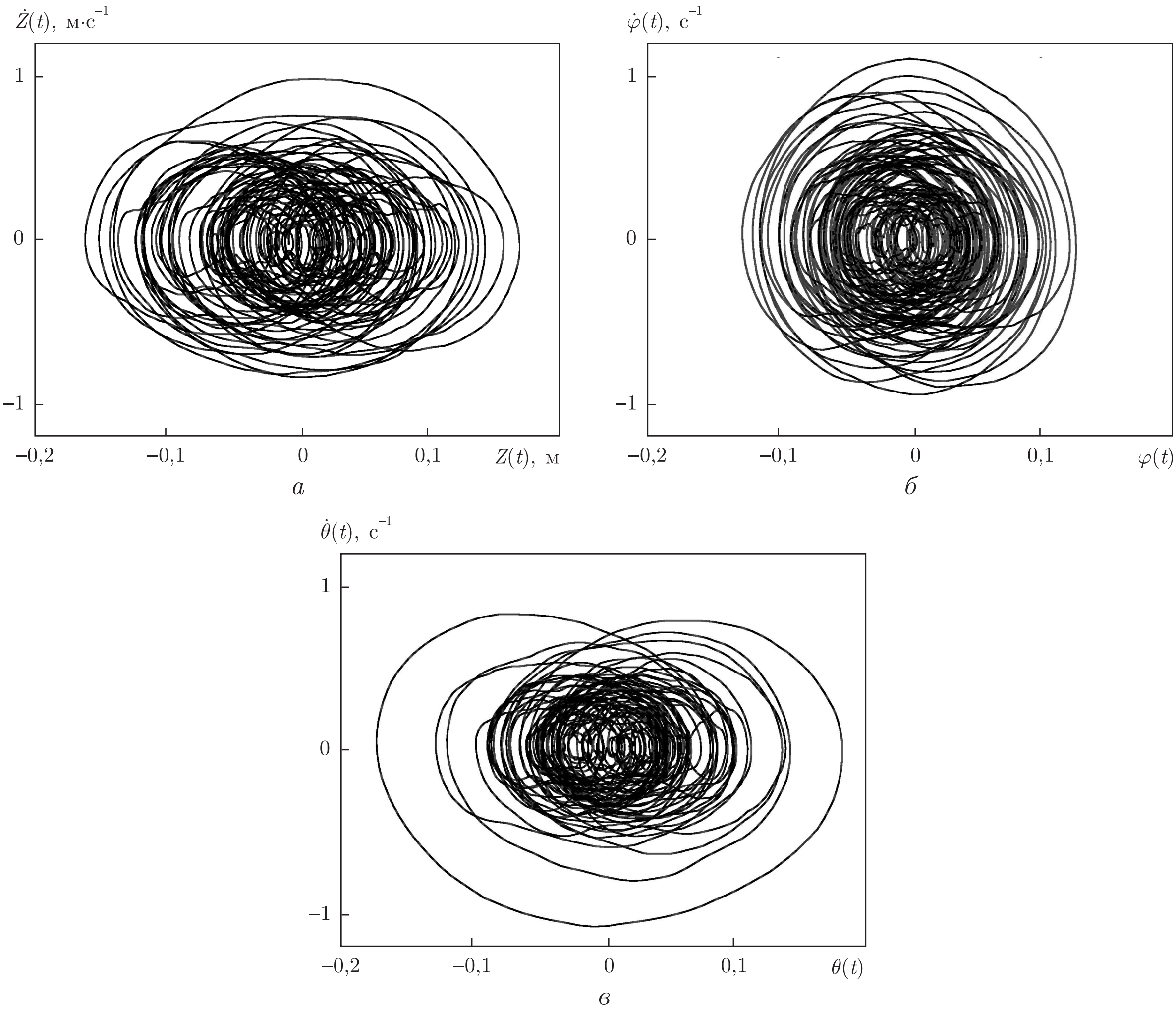

Рис. 2. Фазовые карты случайных колебаний ПЧК ТС

скорость поперечно-угловых колебаний ПЧК; G — вес ПЧК; g — ускорение силы тяжести; J_y — момент инерции ПЧК относительно оси O_cY_c; J_y — момент инерции ПЧК относительно оси O_cX_c; c — коэффициент жесткости рессоры; δ — среднее значение коэффициента демпфирования амортизатора; q — число амортизаторов по каждому из бортов; μ_j — расстояние в горизонтальной плоскости от оси O_cY_c до точки крепления j-го амортизатора; ν_i — расстояние в горизонтальной плоскости от оси O_cY_c до точки крепления i-й рессоры; $\dot{\psi}(t)$ — угловая скорость поворота ПЧК; h_0 — расстояние от поверхности грунта до центра тяжести ПЧК в состоянии покоя ТС при его расположении на идеально горизонтальной поверхности.

В качестве примера рассмотрим многоопорное ТС с шестью опорными катками по каждому из бортов. Численные значения конструктивных параметров транспортного средства составляют: $G = 42 \cdot 10^4$ Н; $J_x = 10{,}4 \cdot 10^4$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с^2; $J_y = 16 \cdot 10^4$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с^2; $q = 3$; $n = 6$; $\delta = 103836$ Н $\cdot$ м$^{-1}$ $\cdot$ с; $c = 200000$ Н $\cdot$ м$^{-1}$; $\mu_1 = 2{,}273$ м; $\mu_2 = 1{,}575$ м; $\mu_3 = -1{,}755$ м; $\nu_1 = 2{,}230$ м; $\nu_2 = 1{,}485$ м; $\nu_3 = 0{,}620$ м; $\nu_4 = -0{,}100$ м; $\nu_5 = -0{,}980$ м; $\nu_6 = -1{,}845$ м; $l_1 = 2{,}528$ м; $l_2 = 1{,}817$ м; $l_3 = 0{,}954$ м; $l_4 = 0{,}233$ м; $l_5 = -0{,}649$ м; $l_6 = -1{,}515$ м;

$S_1 = 2{,}873$ м; $S_2 = 2{,}272$ м; $S_3 = 1{,}665$ м; $S_4 = 1{,}385$ м; $S_5 = 1{,}511$ м; $S_6 = 2{,}084$ м; $B = 2{,}73$ м; $h_0 = 1{,}1$ м.

Предположим, что ТС совершает прямолинейное движение по грунтовой дороге с постоянной скоростью $V = 10$ м $\cdot$ с$^{-1}$. Генерируя случайное НМД-поле, находим случайные функции времени $h(x_{ir}, y_{ir})$, $h(x_{il}, y_{il})$, $\dot{h}(x_{ir}, y_{ir})$, $\dot{h}(x_{il}, y_{il})$, $i = \overline{1, 6}$, в каждый момент времени, подставляем их в правые части дифференциальных уравнений (24)–(26) и интегрируем последние. В результате получаем случайные функции $z(t)$, $\dot{z}(t)$, $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\vartheta(t)$, $\dot{\vartheta}(t)$.

На рис. 2 приведены фазовые карты, описывающие случайные колебания ПЧК ТС. По таким картам, построенным для различных типов грунтов и различных скоростей движения, может быть оценена плавность хода ТС, а именно, максимальные линейные и угловые отклонения корпуса и максимальные линейные и угловые скорости корпуса при движении ТС по неровностям. Так, анализ приведенных фазовых карт позволяет сделать вывод о том, что вертикальные отклонения корпуса ТС при его движении по грунтовой дороге со скоростью $V = 10$ м $\cdot$ с$^{-1}$ достигают 0,17 м, а скорость вертикальных перемещений корпуса достигает величины 1 м/с; амплитуда продольно-угловых отклонений корпуса достигает 0,12 рад, а скорость продольно-угловых колебаний превышает 1,0 с$^{-1}$. Амплитуда поперечно-угловых колебаний достигает 0,18 рад, а угловая скорость этих колебаний доходит до величины 1,0 с$^{-1}$.

Таким образом, плавность хода многоопорного транспортного средства может быть оценена путем моделирования его движения на случайной поверхности, представляющей собою нормальное марковское двумерное поле.

1. *Мазманишвили А. С., Щербань В. Е.* Моделирование марковских случайных последовательностей и алгоритм генерации однородного двумерного марковского поля // Электронное моделирование. – 1996. – **18**, № 2. – С. 93–95.
2. *Мазманишвили А. С., Александрова Т. Е.* Построение случайных поверхностей движения объектов бронетанковой техники // Системи озброєння та військової техніки. – 2012. – № 2. – С. 68–71.
3. *Силаев А. А.* Спектральная теория подрессоривания транспортных машин. – Москва: Машиностроение, 1972. – 192 с.

НТУ "Харьковский политехнический институт"
Сумский государственный университет

Поступило в редакцию 03.12.2012

Член-кореспондент НАН України **М. Д. Борисюк, Т. Є. Александрова, О. С. Мазманішвілі**

Стохастична оцінка плавності ходу багатоопорного транспортного засобу

Запропоновано стохастичну оцінку плавності руху багатоопорного транспортного засобу шляхом просторового моделювання випадкової поверхні руху у вигляді нормального марківського двовимірного поля із заданими стохастичними характеристиками і подальшою оцінкою вертикальних, поздовжньо-кутових і поперечно-кутових випадкових коливань підресореної частини транспортного засобу.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. D. Borisyuk, T. Ye. Alexandrova, A. S. Mazmanishvili**

Stochastic estimate of the multisupporting vehicle ride

The article offers a stochastic estimation of the ride of a multisupporting vehicle with the help of the spatial modeling of a random surface movement in the form of normal Markov two-dimensional fields with given stochastic characteristics and the subsequent evaluation of vertical, longitudinal angular, and transverse angular random fluctuations of the vehicle sprung part.