УДК 517.5

Ю. С. Коломойцев

О достаточных условиях для мультипликаторов Фурье

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Получены новые достаточные условия для мультипликаторов Фурье в пространствах Харди H_p при $0 < p \leqslant 1$ и пространствах L_p при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Эти условия даются в терминах совместного поведения "норм" функции-мультипликатора в пространстве L_q и пространстве Бесова $B^s_{r,\infty}$.

В работе [1] А. Миячи доказал следующее достаточное условие для мультипликаторов Фурье, учитывающее совместное поведение функции и ее частных производных: *Пусть $0 < p < 2$, $a, b \geqslant 0$ и $k > n(1/\min(p,1) - 1/2)$, $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $m \in W^k_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $m(\xi) = 0$ в окрестности нуля и удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$|m(\xi)| \leqslant C|\xi|^{-b} \qquad \text{и} \qquad \left(R^{-n} \int\limits_{R<|\xi|<2R} |D^\nu m(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \leqslant CR^{-b} R^{(a-1)|\nu|_1} \tag{1}$$

для всех $|\nu|_1 \leqslant k$ и $R > 0$. Тогда если $b \geqslant n(1/p - 1/2)a$, то m является мультипликатором Фурье в $H_p(\mathbb{R}^n)$.

Аналогичный результат имеет место и для функций m, имеющих компактный носитель (см. теоремы $1'$, $1''$ и $2''$ в [1]). Легко видеть, что при $b = a = 0$ из данного результата сразу следуют известные достаточные условия Михлина–Хермандера (см. [2, 3]) и Кальдерона–Торчинского [4].

Отметим, что подобные достаточные условия для мультипликаторов степенных рядов в аналитических пространствах Харди $H_p(D^n)$, $0 < p \leqslant 1$, были получены в работе [5].

Точность условий (1) можно проверить, например, используя следующую известную функцию-мультипликатор:

$$m_{\alpha,\beta}(\xi) = \theta(\xi)\frac{e^{i|\xi|^\alpha}}{|\xi|^\beta}, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

где $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta(\xi) = 0$ при $|\xi| < 1$ и $\theta(\xi) = 1$ при $|\xi| \geqslant 2$. Известно (см. [1, 6, 7], а также [8 гл. IV, § 7.4]), что функция $m_{\alpha,\beta}$ при $\alpha \neq 1$ является мультипликатором в пространстве $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 2$, если и только если $\beta \geqslant n(1/p - 1/2)\alpha$.

Для мультипликаторов Фурье в пространствах $L_1(\mathbb{R}^n)$ (C или L_∞) достаточные условия в терминах совместного поведения функции и ее производных появились совсем недавно (см., например, [9; 10 раздел 10]). В частности, в [9] было показано, что если $m \in C(\mathbb{R})$, $\lim m(\xi) = 0$ при $|\xi| \to \infty$, m локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и, дополнительно, при $1 < p,\ q < \infty$ и $1/p + 1/q > 1$

$$m \in L_p(\mathbb{R}), \qquad m' \in L_q(\mathbb{R}), \tag{2}$$

то m является мультипликатором Фурье в $L_1(\mathbb{R})$.

В настоящей работе получены новые достаточные условия для мультипликаторов Фурье, которые сочетают в себе условия вида (1) и (2).

Определения и обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ со скалярным произведением $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$ и нормой $|x| = (x, x)^{1/2}$. Как обычно, пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ состоит из измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которых при $0 < p < \infty$

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Через $C_0(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс непрерывных функций f таких, что $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

Мы будем использовать стандартные обозначения для пространства распределений умеренного роста $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и для соответствующего пространства пробных функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Вещественные пространства Харди $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, определяют как класс умеренных распределений $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{H_p} = \left\| \sup_{t > 0} |\varphi_t * f| \right\|_{L_p} < \infty,$$

где $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \neq 0$ и $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$.

Хорошо известно, что если $1 < p < \infty$, то $H_p(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ с эквивалентными нормами (см. [7]).

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определим стандартным образом

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F} f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi, x)} dx,$$

положим также $\mathscr{F}^{-1} f(\xi) = \mathscr{F} f(-\xi)$. Далее, операторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}^{-1}$ будем понимать в обобщенном смысле.

Функцию m называют мультипликатором Фурье в $H_p(\mathbb{R}^n)$, будем писать $m \in \mathscr{M}(H_p)$, если оператор

$$T \colon \mathscr{F}(Tf)(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi), \qquad f \in H_p(\mathbb{R}^n) \bigcap L_2(\mathbb{R}^n),$$

можно продолжить до линейного ограниченного оператора на всем $H_p(\mathbb{R}^n)$.

Аналогичным образом определяются мультипликаторы в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ (C или L_∞).

Формулировки основных теорем настоящей работы даны в терминах "норм" функций из пространств Бесова $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ и их однородных аналогов $\dot{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Чтобы дать определение этих пространств введем в рассмотрение функцию $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\operatorname{supp} \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$, $\varphi(\xi) > 0$ при $1/2 < |\xi| < 2$ и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1 \qquad \text{при} \qquad \xi \neq 0.$$

Введем также функции φ_k и ψ соотношениями $\mathscr{F}\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)$ и $\mathscr{F}\psi(\xi) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi)$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $0 < p$, $q \leqslant \infty$. Будем говорить, что $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит (неоднородному) пространству Бесова $B^s_{p,\infty}$, если

$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}} = \|\psi * f\|_{L_p} + \sup_{k \geqslant 1} 2^{sk} \|\varphi_k * f\|_{L_p} < \infty.$$

Для того чтобы привести определение однородных пространств Бесова напомним, что

$$\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \colon (D^\nu \widehat{\varphi})(0) = 0 \text{ для всех } \nu \in \mathbb{N}^n \bigcup \{0\}\},$$

а $\dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что $f \in \dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит однородному пространству Бесова $\dot{B}^s_{p,\infty}$, если

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{sk} \|\varphi_k * f\|_{L_p} < \infty.$$

Формулировки результатов. Для формулировки основных результатов нам понадобится вспомогательная функция $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\operatorname{supp} \eta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon 1/4 \leqslant |\xi| \leqslant 4\}$, $0 \leqslant \eta(\xi) \leqslant 1$, для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta(\xi) = 1$ при $1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2$. Далее будем говорить, что функция m принадлежит локально пространству X, если $m(\delta\cdot)\eta \in X$ для любого $\delta > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < 1$, $0 < q$, $r \leqslant \infty$, $s > n(1/p - 1/2)$ *и функция* m *принадлежит локально пространству* $L_q \bigcap B^s_{r,\infty}$. *Предположим, что* $q = r = 2$ *или*

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} < \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{n}{s}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right).$$

Если, дополнительно,

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{1-\theta}_{L_q} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{\theta}_{B^s_{r,\infty}} < \infty,$$

то $m \in \mathscr{M}(H_p)$.

В пространствах $H_1(\mathbb{R}^n)$ и $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, имеет место следующий более слабый аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$, $0 < q$, $r \leqslant \infty$, $s > \sigma > n(1/p - 1/2)$ *и ограниченная функция* m *принадлежит локально пространству* $B^s_{r,\infty}$. *Предположим, что* $1/q = 1/r = 1/p - 1/2$ *или*

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\sigma}{s}.$$

Если, дополнительно,

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{1-\theta}_{L_q} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{\theta}_{B^s_{r,\infty}} < \infty,$$

то $m \in \mathscr{M}(H_p)$.

Используя теорему 1, нетрудно проверить, что функция $m_{\alpha,\beta}$ принадлежит пространству $\mathscr{M}(H_p)$, $0 < p < 1$, если $\beta \geqslant \alpha n(1/p - 1/2)$. С помощью теоремы 2 аналог данного результата с $1 \leqslant p < 2$ можно получить только при $\beta > \alpha n(1/p-1/2)$. Если $\beta = \alpha n(1/p-1/2)$, то теоремы 2, в отличие от теоремы 1, уже не достаточно.

В следующих теоремах мы устраняем этот недостаток, однако для этого нам приходится брать $q = \infty$, если $s > n/2$ и, дополнительно, $r = \infty$, если $s > n(1/p - 1/2)$.

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant p < 2$, $0 < r \leqslant \infty$, $s > n/\min(r, 2)$ и функция m принадлежит локально пространству $L_\infty \bigcap B^s_{r,\infty}$. Если, дополнительно,*

$$\sup_{\delta>0} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{1-\theta}_{L_\infty} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{\theta}_{B^s_{r,\infty}} < \infty, \qquad \theta = \frac{n}{s}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right),$$

то $m \in \mathscr{M}(H_p)$.

Теорема 4. *Пусть $1 < p < 2$, $s > n(1/p - 1/2)$ и функция m принадлежит локально пространству $B^s_{\infty,\infty}$. Если, дополнительно,*

$$\sup_{\delta>0} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{1-\theta}_{L_\infty} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{\theta}_{B^s_{\infty,\infty}} < \infty, \qquad \theta = \frac{n}{s}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right), \tag{3}$$

то $m \in \mathscr{M}(L_p)$.

В следующих двух предложениях показана точность теорем 1–4.

Предложение 1. *Пусть $0 < p < 2$, $1 \leqslant q$, $r \leqslant \infty$ и $s > n(1/p - 1/2)$. Если $\theta^* < n(1/p - 1/2)/s$, то найдется функция $m \in L_\infty \bigcap C^\infty$ такая, что*

$$\sup_{\delta>0} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{1-\theta^*}_{L_q} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{\theta^*}_{B^s_{r,\infty}} < \infty,$$

но $m \notin \mathscr{M}(H_p)$.

Предложение 2. *Пусть $0 < p < 2$, $1 \leqslant q$, $r \leqslant \infty$, $s > n(1/p-1/2)$ и $\theta = n(1/p-1/2)/s$. Если*

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} > \frac{1}{2} \qquad \text{при} \qquad 0 < p < 1,$$

и

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \qquad \text{при} \qquad 1 \leqslant p < 2,$$

то найдется функция $m \in L_\infty \bigcap C^\infty$ такая, что

$$\sup_{\delta>0} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{1-\theta}_{L_q} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{\theta}_{B^s_{r,\infty}} < \infty,$$

но $m \notin \mathscr{M}(H_p)$.

Перейдем к достаточным условиям для мультипликаторов Фурье в пространствах $L_1(\mathbb{R}^n)$ (C или L_∞). Прежде чем сформулировать следующий результат, рассмотрим класс функций представимых в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье:

$$W_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f\colon f(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} g(x)\, dx,\ g \in L_1(\mathbb{R}^n) \right\},$$

который называют алгеброй Винера или кольцом Винера. Хорошо известно (см., например, [8, с. 113]), что принадлежность функции f пространству $W_0(\mathbb{R}^n)$ делает ее мультипликатором Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, мультипликатором Фурье в $L_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$.

Теорема 5. *Пусть* $0 < q,\ r \leqslant \infty$, $\sigma < n/\max(q,2)$, $s > n/\min(r,2)$ *и функция* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. *Предположим, что* $q = r = 2$ *или*

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} > \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\dfrac{n}{2} - \sigma}{s - \sigma}.$$

Если, дополнительно, $f \in \dot{B}^{\sigma}_{q,\infty} \bigcap \dot{B}^{s}_{r,\infty}$, *то* $f \in W_0(\mathbb{R}^n)$.

Как и предыдущие теоремы данный результат является точным.

Предложение 3. *Пусть* $1 \leqslant q,\ r \leqslant \infty$, $\sigma, s \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\sigma < n/\max(q,2)$ *и* $s > n/\min(r,2)$. *Если*

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} < \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{n/2 - \sigma}{s - \sigma},$$

то найдется функция $f \in C_0 \bigcap \dot{B}^{\sigma}_{q,\infty} \bigcap \dot{B}^{s}_{r,\infty}$, *но* $f \notin W_0(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 1. *Пусть* $0 < p < 2$, $1 < r < \infty$, $s > \dfrac{2n}{\min(r,2)}\left(\dfrac{1}{\min(p,1)} - \dfrac{1}{2}\right)$, $m \in L_\infty$ *и локально* $(I - \Delta)^{s/2} m \in L_r$. *Если*

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta\cdot)\eta\|^{1-\theta}_{L_\infty} \|(I - \Delta)^{s/2} m(\delta\cdot)\eta\|^{\theta}_{L_r} < \infty,$$

то $m \in \mathscr{M}(H_p)$.

Здесь и далее $(I - \Delta)^{s/2} f = \mathscr{F}^{-1}\{(1 + |\cdot|^2)^{s/2} \widehat{f}\}$ и $(-\Delta)^{s/2} f = \mathscr{F}^{-1}\{|\cdot|^s \widehat{f}\}$.

Данное следствие является усилением дробного варианта теоремы Хермандера (см. [11, теоремы 3.3 и 4]), а также является обобщением достаточных условий для мультипликаторов из [1].

Следствие 2. *Пусть* $0 < q \leqslant \infty$, $1 < r < \infty$, $s > n/\min(r,2)$ *и функция* $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. *Предположим, что* $q = r = 2$ *или*

$$\left(1 - \frac{n}{2s}\right)\frac{1}{q} + \left(\frac{n}{2s}\right)\frac{1}{r} > \frac{1}{2}.$$

Если, дополнительно, $f \in L_q$ *и* $(-\Delta)^{s/2} f \in L_r$, *то* $f \in W_0(\mathbb{R}^n)$.

Легко видеть, что при $s = n = 1$ мы получаем основной результат работы [9], а при $q = r = 2$ — известную теорему типа Берлинга (см. [12, 13]).

1. *Miyachi A.* On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math. – 1980. – **27**. – P. 157–179.
2. *Михлин С. Г.* О мультипликаторах интегралов Фурье // Докл. АН СССР. – 1956. – **109**, No 4. – С. 701–703.
3. *Hörmander L.* Estimates for translation invariant operators in L_p spaces // Acta Math. – 1960. – **104**. – P. 93–109.
4. *Calderon A. P., Torchinsky A.* Parabolic maximal functions associated with a distribution II // Adv. Math. – 1977. – **24**. – P. 101–171.

5. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Мат. сб. – 1997. – **188**, No 4. – С. 145–160.
6. *Wainger S.* Special trigonometric series in k dimensions. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1965. – Vol. 59. – 102 p.
7. *Fefferman Ch., Stein E. M.* H^p spaces of several variables // Acta Math. – 1972. – **129**. – P. 137–193.
8. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – Москва: Мир, 1973. – 342 с.
9. *Liflyand E.* On absolute convergence of Fourier integrals // Real Anal. Exchange. – 2010. – **36**, No 2. – P. 353–360.
10. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview // Anal. Math. Phys. – 2012. – **2**, No 1. – P. 1–68.
11. *Лизоркин П. И.* Предельные случаи теорем о $\mathscr{F}L_p$-мультипликаторах // Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Ч. 11. Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 164–180.
12. *Beurling A.* Sur les integrales de Fourier absolument convergentes et leur application à fonctionelle // Proc. IX Congr. de Math. Scand. – Helsingfors, 1938. – P. 345–366.
13. *Löfström J.* Besov spaces in the theory of approximation // Ann. Mat. Pura Appl. – 1970. – **85**. – P. 93–184.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 19.11.2012

Ю. С. Коломойцев

Про достатні умови для мультиплікаторів Фур'є

Отримано нові достатні умови для мультиплікаторів Фур'є в просторах Харді H_p при $0 < p \leqslant 1$ та просторах L_p при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ці умови дані в термінах спільної поведінки "норм" функції-мультиплікатора у просторі L_q і просторі Бесова $B^s_{r,\infty}$.

Yu. S. Kolomoitsev

On sufficient conditions for Fourier multipliers

Some new sufficient conditions for Fourier multipliers in Hardy spaces H_p for $0 < p \leqslant 1$ and L_p-spaces for $1 \leqslant p \leqslant \infty$ are obtained. These sufficient conditions are given in terms of the simultaneous behavior of the "norms" of a function-multiplier in the space L_q and the Besov space $B^s_{r,\infty}$.