Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

7 • 2013

МЕХАНІКА

УДК 539.421

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов, Ю. О. Чорноіван

Про межі застосовності наближених підходів до дослідження макроскопічних тріщин поперечного зсуву у в'язкопружних анізотропних композитах

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Із застосуванням моделі тріщини з зоною передруйнування побудовано визначальні рівняння росту в задачі про розвиток тріщини поперечного зсуву у в'язкопружному анізотропному тілі. Одержані рівняння спрощено на основі припущення про малий розмір зони передруйнування у вершинах тріщини. Наведено результати порівняння отриманих за допомогою наближеного рівняння значень довговічності тіла з в'язкопружного композита із значеннями довговічності, отриманими за допомогою розв'язання точних рівнянь розвитку тріщини.

Експериментальні дослідження демонструють те, що причиною виходу з ладу елементів конструкцій із полімерних композитних матеріалів може бути стійке зростання тріщини внаслідок спадкових властивостей матеріалів компонент композита [1].

Моделі такого відкладеного руйнування в'язкопружних матеріалів побудовано в основному для випадків тріщини нормального відриву [2]. Втім, для вивчення процесів тривалого руйнування спадкових матеріалів цікавим є дослідження росту тріщин при докритичних зсувних навантаженнях. Ця робота є продовженням досліджень, початих у роботах [3, 4], в ній розглянуто можливість застосування наближених підходів для дослідження довготривалості лінійно в'язкопружних пластин з тріщинами поперечного зсуву.

Постановка задачі та застосована модель. Розглянемо двофазний композитний матеріал з однонапрямним армуванням дискретними трансверсально ізотропними волокнами. Вважатимемо, що матеріали обох фаз композита виявляють в'язкопружні властивості, які обумовлюють спадкову поведінку композита загалом. Релаксаційні модулі матеріалів компонентів у загальному випадку задані рядом функцій Міттаг–Леффлера

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{(ij)\infty} + \sum_{k=1}^{n} \mu_{(ij)k} E_{\alpha_{(ij)},1}(-\beta_{(ij)k} t^{\alpha_{(ij)}}), \qquad E_{\alpha,\delta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma[\alpha n + \delta]}. \tag{1}$$

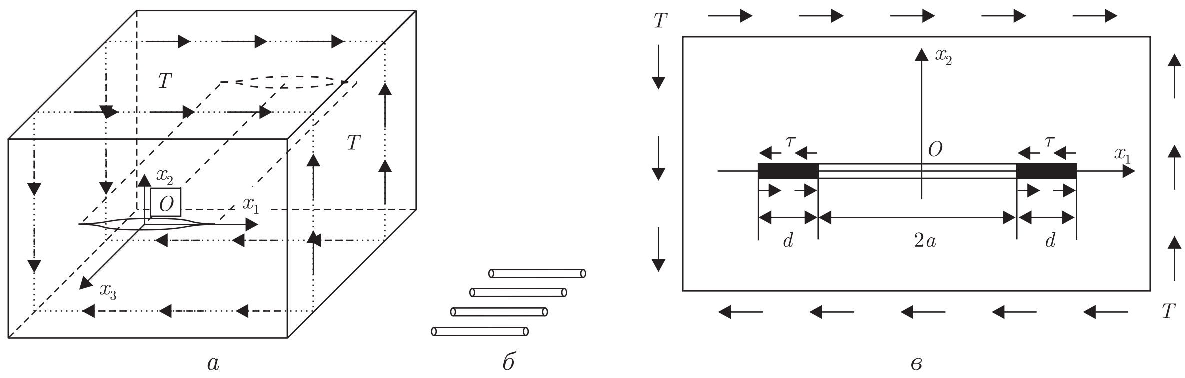

Рис. 1

Будемо досліджувати тривале руйнування тіла, виготовленого з матеріалу тіла з наскрізною тріщиною. На нескінченності на тіло діють зусилля T в нормальному до осі x_3 напрямку (рис. 1, *а*).

Деформування тіла відбувається за умов плоскої деформації. Тріщину розташовано в одній з площин симетрії механічних властивостей композита, під час свого розвитку тріщина не виходить за межі цієї площини. Таке припущення виконується для композитів з високим ступенем адгезії, не схильних до розшарування. Розглянемо варіант напрямку армування вздовж осі розташування тріщини x_1 (рис. 1, *б*).

Тріщину-щілину у в'язкопружному композиті можна подати як розріз, береги якого мають дві характерних ділянки — на одній береги взаємодіють, на іншій — ні [4]. Взаємодія берегів відбувається у вузьких зонах передруйнування на краях тріщини (рис. 1, *в*). При поперечному зсуві поширення тріщини стримується матеріалом у зоні вершини тріщини, поки зсув берегів у зоні вершини не перевищить критичного значення [1, 5]

$$2u(t)|_{x_1=a} \equiv \delta(t)|_{x_1=a} = \delta_{\mathrm{II}*}, \tag{2}$$

де $2a$ — розмір тріщини; $u(t)$ — зміщення вздовж осі x_1; t — час.

У процесі моделювання протидії матеріалу в зоні вершини тріщини (зоні передруйнування) відповідними дотичними напруженнями будемо припускати, що ці напруження τ_0 рівномірно розподілені вздовж берегів зони передруйнування довжини $d(t)$ і не змінюються під час докритичного зростання. Для в'язкопружнопластичних матеріалів зазвичай покладають $\tau_0 = \tau_s$, де τ_s — границя текучості при зсуві. У загальному випадку цю характеристику необхідно визначити експериментально [2]. Розмір зони передруйнування $d(t)$ визначається з умови обмеженості напружень в кінці цієї зони при $x_1 = a + d(t)$.

Отже, для відповідної задачі теорії лінійної в'язкопружності маємо такі граничні умови: у нескінченній області існує розріз вздовж осі x_1 довжиною $2(a + d)$ з центром у початку координат; на поверхні розрізу діють напруження

$$\sigma_{11}(x,0) = 0; \qquad \sigma_{22}(x,0) = 0; \qquad \tau_{12} = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant a, \\ \tau_0, & a < |x| \leqslant a + d. \end{cases}$$

У нескінченно віддалених точках площини $\tau_{12}(x, \infty) = T$. У задачі з викладеними вище умовами будемо визначати довговічність тіла, тобто тривалість часового проміжку між початковим моментом часу та початком динамічного руйнування тіла.

Рівняння розвитку тріщини у в'язкопружному композиті. Для отримання визначальних рівнянь розвитку тріщини скористаємося принципом Вольтерра або принципом пружно-в'язкопружної аналогії.

На площині x_1Ox_2 взаємний зсув берегів тріщини довжиною $2a$ в точці $(x, 0)$ для досліджуваної пружного аналога поставленої задачі, потрібний для підставляння до рівняння (2), можна обчислити за формулою

$$2u(x,a) = Lu_1(x,a), \qquad u_1(x,a) = \frac{\tau_0 K_1(x,a)}{\pi}, \qquad |x| \leqslant a + d, \tag{3}$$

де

$$K_1(x,a) = x \ln\left|\frac{aX(x) - X(a)x}{aX(x) + X(a)x}\right| - a \ln\left|\frac{X(x) - X(a)}{X(x) + X(a)}\right|, \qquad X(x) = \sqrt{(a+d)^2 - x^2}.$$

У вершині тріщини ($x = a$) маємо

$$K_1(a,a) = 2a \ln\left(1 + \frac{d}{a}\right) = 2ka, \qquad k = -\ln\cos B, \qquad B = \frac{\pi T}{2\tau_0}.$$

Довжина d визначається з рівняння

$$\arccos\left(\frac{a}{a+d}\right) = B.$$

У виразі (3) характеристика L, пов'язана із властивостями матеріалу, визначається у такий спосіб [1]:

$$L = L(a_{ij}) = 2\sqrt{a_{11}(L_2 + a_{66})}; \qquad L_2 = 2\big(\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12}\big). \tag{4}$$

У виразі (4) коефіцієнти a_{ij} є компонентами тензора податливості ортотропного тіла. Ці величини можна отримати на основі відомих характеристик компонентів композита за допомогою гомогенізації [3].

На основі обгрунтування, аналогічного до наведеного для тріщини нормального відриву у роботі [2], для отримання розв'язку в'язкопружної задачі може бути застосовано принци пружно-в'язкопружної аналогії, тобто ми можемо замінити пружні модулі відповідними їм в'язкопружними операторами. Після заміни функція пружних сталих L у рівнянні (3) перетвориться на операторну функцію, ядро якої надалі позначатимемо $L(t)$.

Процес докритичного стабільного росту тріщини поперечного зсуву, як і для тріщини нормального відриву, умовно розділимо на три періоди [2]: інкубаційний, перехідний і основний. Виходячи з принципу Вольтерра і співвідношень для визначення пружного зсуву берегів тріщини (2), запишемо рівняння розвитку.

При $x_1 = a_0$ (a_0 — початковий напіврозмір тріщини) маємо розкриття для інкубаційного періоду, під час якого спостерігається зсув берегів тріщини без її зростання:

$$\delta(t) = \delta(a_0) + \int\limits_0^t L'(t-\tau)\delta(a_0)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

Отже, маємо таке рівняння розвитку тріщини:

$$\delta(a_0)\left[1+\int\limits_0^{t_0} L'(t_0-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\delta_{\mathrm{II}*}. \tag{6}$$

При $a_0 < x_1 \leqslant a_0 + d_0$ (d_0 — початковий розмір зони передруйнування) маємо розкриття для перехідного періоду

$$\delta(t)=\delta[a(t)]+\int\limits_0^{t_0} L'(t-\tau)\delta(a(t),a_0)\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_{t_0}^{t} L'(t-\tau)\delta[a(t),a(\tau)]\,\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

де t_0 — тривалість інкубаційного періоду; за час цього періоду тріщина стартує і проходить відстань, яка дорівнює довжині її початкової кінцевої зони. Тоді рівняння росту тріщини має вигляд

$$\delta[a(t)]+\int\limits_0^{t_0} L'(t-\tau)\delta(a(t),a_0)\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_{t_0}^{t} L'(t-\tau)\delta[a(t),a(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=\delta_{\mathrm{II}*}. \tag{8}$$

При $x_1 > a_0 + d_0$ маємо розкриття для основного періоду

$$\delta(t)=\delta[a(t)]+\int\limits_{t'}^{t} L'(t-\tau)\delta[a(t),a(\tau)]\,\mathrm{d}\tau, \tag{9}$$

де t' визначається з рівняння $a(t) - a(t') = d(t)$; за час цього періоду тріщина повільно підростає до свого критичного розміру, після чого починається її динамічний розвиток.

Відповідні рівняння росту

$$\delta[a(t)]+\int\limits_{t'}^{t} L'(t-\tau)\delta[a(t),a(\tau)]\,\mathrm{d}\tau=\delta_{\mathrm{II}*}. \tag{10}$$

Таким чином, довговічність тіла t_* у загальному випадку може бути визначена, як момент часу, коли розв'язок рівняння (10) виходить на вертикальну асимптоту.

Наближення для макроскопічної тріщини. Розкладаючи функцію K_1 у ряд Тейлора за параметром d/a, отримуємо, що

$$K_1(x,a)=2dF\left(\frac{x-a}{d}\right)+O\left(\left[\frac{d}{a}\right]^2\right),$$

де

$$F(s)=\sqrt{1-s}+\frac{s}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}}. \tag{11}$$

Якщо d/a — мала величина,

$$K_1(x,a)=2dF\left(\frac{x-a}{d}\right),\qquad K_1(a,a)=2d.$$

Для зростаючої тріщини у в'язкопружному тілі

$$K_1[a(t), a(\tau)] = 2d(\tau)F\left[\frac{a(t) - a(\tau)}{d(\tau)}\right].$$

Якщо прискорення поширення тріщини — мала величина,

$$a(t) - a(\tau) = a'(t)(t - \tau), \qquad t' \leqslant \tau \leqslant t, \qquad a(t) - a(t') = d(t').$$

Враховуючи те, що $d(\tau) = ka(\tau)$, у рівнянні основного періоду зростання тріщини (10) робимо заміну

$$s = \frac{a(t) - a(\tau)}{d(\tau)} = \frac{a'(t)(t - \tau)}{a(t) - a'(t)(t - \tau)}.$$

Підставляючи

$$t - \tau = k\frac{a(t)}{a'(t)}\frac{s}{1 + ks}, \qquad \mathrm{d}\tau = -k\frac{a(t)}{a'(t)}\frac{\mathrm{d}s}{(1 + ks)^2}, \qquad a(\tau) = \frac{a(t)}{1 + ks}$$

та

$$\delta_* = \frac{2L_0\tau_0 k a_*}{\pi},$$

де a_* — критичне значення напівдовжини тріщини, до рівняння основного періоду зростання тріщини, отримаємо

$$1 + k\frac{a(t)}{a'(t)}\int\limits_0^1 L'\left(k\frac{a(t)}{a'(t)}\frac{s}{1 + ks}\right)\frac{F(s)}{(1 + ks)^3}\mathrm{d}s = \frac{a_*}{a(t)}.$$

Таким чином, пов'язану з швидкістю зростання тріщини величину $\tilde{a} = ka(t)/a'(t)$ можна отримати як функцію довжини тріщини $\tilde{a} = G(a)$ з рівняння

$$\tilde{a}H(\tilde{a}) = \frac{a_*}{/}a - 1, \qquad H(\tilde{a}) = \int\limits_0^1 L'\left(\frac{s\tilde{a}}{1 + ks}\right)\frac{F(s)}{(1 + ks)^3}\mathrm{d}s.$$

Довжина тріщини буде пов'язана з часом рівнянням

$$\int\limits_{a_0}^{a} \frac{G(l)}{kl}\mathrm{d}l = \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{d}t.$$

Отже, довговічність тіла з тріщиною можна знайти так:

$$t_* = t_0 + \frac{1}{k}\int\limits_{a_0}^{a_*} \frac{G(l)}{l}\mathrm{d}l.$$

Результати порівняння довговічностей, отриманих за допомогою загального підходу (рівняння (6), (8), (10)), та довговічностей, обчислених на основі викладених вище наближень, подано у табл. 1. Дані наведено у формі відносної похибки наближеного значення до

Таблиця 1

$\frac{a_*}{a_0}$		$c_1 = 0{,}2$						$c_1 = 0{,}33$					
		$\tau_0/T = 3$		$\tau_0/T = 5$		$\tau_0/T = 7$		$\tau_0/T = 3$		$\tau_0/T = 5$		$\tau_0/T = 7$	
1,5	1)	2,25	48,5%	2,69	24,2%	2,98	18,0%	2,42	48,4%	2,86	24,1%	3,15	17,9%
	2)	1,51	48,5%	1,94	24,2%	2,23	18,0%	1,37	48,5%	1,81	24,2%	2,10	18,0%
	3)	2,25	48,5%	2,69	24,2%	2,98	18,0%	2,42	48,4%	2,86	24,1%	3,15	17,9%
	4)	2,20	48,6%	2,64	24,3%	2,93	18,1%	2,34	48,5%	2,78	24,2%	3,07	18,0%
	5)	2,09	48,8%	2,53	24,4%	2,82	18,2%	2,19	48,7%	2,63	24,3%	2,91	18,1%
	6)	1,54	48,6%	1,97	24,3%	2,26	18,1%	1,43	48,6%	1,86	24,3%	2,15	18,1%
	7)	2,09	48,8%	2,53	24,4%	2,82	18,2%	2,19	48,7%	2,63	24,3%	2,91	18,1%
	8)	2,07	48,8%	2,50	24,4%	2,79	18,2%	2,15	48,7%	2,58	24,4%	2,87	18,1%
2,5	1)	3,55	50,0%	3,98	33,7%	4,27	30,2%	3,74	49,8%	4,17	33,4%	4,46	29,9%
	2)	2,81	50,1%	3,25	33,7%	3,54	30,1%	2,67	50,0%	3,11	33,7%	3,40	30,2%
	3)	3,55	50,0%	3,98	33,7%	4,27	30,2%	3,74	49,8%	4,17	33,4%	4,46	29,9%
	4)	3,48	50,3%	3,92	33,9%	4,21	30,4%	3,63	50,2%	4,07	33,8%	4,36	30,3%
	5)	3,35	50,6%	3,79	34,2%	4,08	30,7%	3,46	50,5%	3,90	34,1%	4,18	30,6%
	6)	2,82	50,3%	3,26	33,9%	3,54	30,4%	2,71	50,3%	3,15	33,9%	3,44	30,4%
	7)	3,35	50,6%	3,79	34,2%	4,08	30,7%	3,46	50,5%	3,90	34,1%	4,18	30,6%
	8)	3,32	50,7%	3,76	34,3%	4,05	30,8%	3,41	50,6%	3,85	34,2%	4,13	30,7%

точного (додатні значення відповідають випадку, коли наближене значення є більшим за точне). (E_0 — миттєве значення модуля Юнга; E_∞ — довготривале значення модуля Юнга; верхній індекс (1) відповідає армуванню, (2) — наповнювачу.) Стовпчики 2–4 — $c_1 = 0{,}2$, стовпчики 5–7 — $c_1 = 0{,}33$. Кожна пара чисел відповідає довговічності тіла з тріщиною $(\lg t_N, \lg(t,c))$, збільшенню довговічності при використанні наближеного підходу; номер перед круглою дужкою вказує на набір параметрів $\{\lg E_0^{(1)}/E_0^{(2)}, -\lg \beta^{(1)}/\beta^{(2)}/\alpha, \lg E_0^{(1)}/E_\infty^{(1)}\}$: 1-й — $\{1, -1, 0\}$, 2-й — $\{1, -1, 2\}$, 3-й — $\{1, 2, 0\}$, 4-й — $\{1, 2, 2\}$, 5-й — $\{1{,}5, -1, 0\}$, 6-й — $\{1{,}5, -1, 2\}$, 7-й — $\{1{,}5; 2, 0\}$, 8-й — $\{1{,}5; 2, 2\}$.

Аналіз даних, викладених у табл. 1, дає змогу стверджувати, що, хоча зі збільшенням відношення τ_0/T, що призводить до зменшення величини d/a, відмінність між значенням довговічності для різних підходів до розв'язання задачі зменшується, цією відмінністю неможна нехтувати, враховуючи те, що наближені макропідходи дають завищені значення довговічності.

Також слід відзначити, що вплив зміни жорсткості матеріалу на відмінність результатів для довговічності є незначним.

1. *Серенсен С. В., Зайцев Г. П.* Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 295 с.
2. *Каминский А. А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 312 с.
3. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.* Про докритичний розвиток тріщини зсуву в композиті з в'язкопружними компонентами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 99–108.
4. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.* Докритичний розвиток тріщини поздовжнього зсуву у в'язкопружному композиті // Доп. НАН України. – 2010. – № 11. – С. 37–44.
5. *Ву Э.* Прочность и разрушение композитов // Композиционные материалы. Т. 5. – Разрушение и усталость / под. ред. Л. Браутман. – Москва: Мир, 1978. – 484 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 20.12.2012

А. А. Каминский, М. Ф. Селиванов, Ю. А. Черноиван

О границах применимости приближенных подходов к исследованию макроскопических трещин поперечного сдвига в вязкоупругих анизотропных композитах

С использованием модели трещины с зоной предразрушения построены определяющие уравнения роста в задаче о развитии трещины поперечного сдвига в вязкоупругом анизотропном теле. Полученные уравнения упрощены на основе предположения о малом размере зоны предразрушения в вершинах трещины. Приведены результаты сравнения полученных с помощью приближенного уравнения значений долговечности тела из вязкоупругого композита со значениями долговечности, которые были получены с помощью решения точных уравнений развития трещины.

A. A. Kaminsky, M. F. Selivanov, Yu. O. Chornoivan

On the applicability of approximate approaches to the study of macroscopic mode II cracks in viscoelastic anisotropic composites

The constitutive equations of mode II crack growth in a viscoelastic anisotropic body are obtained, by using the model of crack with prefracture zone. The equations are simplified for the case of small prefracture zones at the tips of a crack. The longevity values for the body of a viscoelastic composite are compared with those for the simplified approach and the precise solution.