УДК 517.9

А. С. Крилова, Г. В. Сандраков

Асимптотичний аналіз спектральної задачі на дрібноперіодичній сітці

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Розглянуто усереднення та асимптотичний аналіз спектральної задачі на дрібноперіодичній сітці з періодичними крайовими умовами. Наведено оцінку, що є обгрунтуванням отриманої усередненої асимптотики. Методом теорії Флоке побудовано точні власні функції і значення задачі на сітці. Встановлено відповідність між усередненими асимптотиками та точними власними функціями і значеннями Флоке.

У даній роботі проводиться усереднення спектральної задачі для рівнянь другого порядку на дрібноперіодичній сітці, де розглядаються комплекснозначні власні функції. Випадок дійснозначних власних функцій був досліджений у [1]. Для поставленої задачі можна використовувати й інший підхід за рахунок спектра Флоке, який був розглянутий у [2]. Перш ніж визначити задачу на сітці, розглянемо задачу на періодично повторюваній комірці, яка є фрагментом сітки.

1. Постановка задачі на комірці. Визначимо множину Y як об'єднання двох замкнутих натягнутих струн σ_1 та σ_2, які зв'язані в їх спільній середині та містяться в прямокутнику $Q = [0,1] \times [0,l] \subset \mathbb{R}^2$, де l — фіксоване додатне число. Розглянемо покриття $\mathbb{R}^2$ сіткою таких прямокутників, у кожному з яких знаходиться одна й та сама множина Y. Множину Y будемо називати періодично повторюваною коміркою сітки. Прикладом такого об'єднання струн, які містяться у періодично повторюваній комірці, є струнний хрест, який розглянутий у [2, 3]. Струни хреста вважатимемо однорідними відрізками, розташованими під прямим кутом відносно одна одної та такими, що мають одиничний натяг та щільність розподілу мас [3].

Позначимо через $C(Y)$ множину функцій $u\colon Y \to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y неперервних функцій, визначених на прямокутнику Q. Функцію u на струнному хресті розглядатимемо як набір неперервних звужень функції на кожну струну хреста, які позначені через $u_1(y_1)$, $u_2(y_2)$ та параметризовані природним чином координатами y_1 із $[0,1]$, y_2 із $[0,l]$. Визначимо інтеграл як суму інтегралів по кожній із струн, помножену на нормуючий множник $l/(l+1)$

$$\int_Y u(y)\,dy = \frac{l}{l+1}\left(\int_0^1 u_1(y_1)\,dy_1 + \int_0^l u_2(y_2)\,dy_2\right). \tag{1}$$

Визначимо $C^1(Y)$ як множину функцій $u\colon Y \to \mathbb{C}$, які є обмеженнями на Y функцій із $C^1(Q)$, заданих на прямокутнику Q. Простір $L^2(Y)$ це поповнення простору $C(Y)$ за нормою, індукованою скалярним добутком $(u,v)_{L^2(Y)} = \int_Y u\overline{v}\,dy$.

© А. С. Крилова, Г. В. Сандраков, 2013

Функціональний простір $H^1(Y)$ є поповненням $C^1(Y)$ за нормою $\|\cdot\|_{H^1(Y)}$, що відповідає скалярному добутку $\langle u,v\rangle_{H^1(Y)} = \int\limits_Y u\overline{v}\,dy + \int\limits_Y (\partial_y u)(\partial_y \overline{v})\,dy$. Множину функцій $u \in C^1(Y)$, що задовольняють умови періодичності

$$u_1(0) = u_1(1), \qquad u_2(0) = u_2(l), \qquad \partial_{y_1} u_1(0) = \partial_{y_1} u_1(1), \qquad \partial_{y_2} u_2(0) = \partial_{y_2} u_2(l),$$

позначимо через $C^1_{\mathrm{per}}(Y)$. Поповнення множини періодичних функцій $C^1_{\mathrm{per}}(Y)$ за нормою $\|u\|_{H^1(Y)} = \int\limits_Y |u|^2 dy + \int\limits_Y |\partial_y u|^2 dy$ позначається через $H^1_{\mathrm{per}}(Y)$.

Розглянемо таку Y-періодичну спектральну задачу на комірці: знайти $u \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)$ таку, що $\|u\|_{L^2(Y)} = 1$ та

$$\begin{aligned} &-\partial^2_{y_1} u_1(y_1) = \lambda u_1(y_1) \quad \text{при} \quad y_1 \in [0,1], \qquad -\partial^2_{y_2} u_2(y_2) = \lambda u_2(y_2) \quad \text{при} \quad y_2 \in [0,l], \\ &u_1(0) = u_1(1), \qquad u_2(0) = u_2(l), \qquad \partial_{y_1} u_1(0) = \partial_{y_1} u_1(1), \qquad \partial_{y_2} u_2(0) = \partial_{y_2} u_2(l) \end{aligned} \tag{2}$$

з умовами неперервності функцій та потоків у вузлах перетину струн

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{l}{2}\right),$$

$$\partial_{y_1} u_1\left(\frac{1}{2}+0\right) - \partial_{y_1} u_1\left(\frac{1}{2}-0\right) + \partial_{y_2} u_2\left(\frac{l}{2}+0\right) - \partial_{y_2} u_2\left(\frac{l}{2}-0\right) = 0.$$

Слід зазначити, що умови неперервності та періодичності виконані автоматично для $u \in C^1_{per}(Y)$ (і, у відомому сенсі [4], для $u \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)$).

2. Задача на сітці. Зменшимо прямокутник Q і струни хреста Y у N разів, де N є заданим натуральним числом. Отримаємо множини Q_ε і Y_ε із координатами $x' = \varepsilon y$ при $\varepsilon = 1/N$. Повторимо по періодичності прямокутники Q_ε та отримаємо замкнену область $\Omega = [0,1] \times [0,l] \subset \mathbb{R}^2$ із ліпшицевою границею $\partial\Omega$. На цю область натягнута дрібноперіодична сітка G_ε в $\mathbb{R}^2$, що є об'єднанням N^2 струнних хрестів Y_ε. Таке Y_ε назвемо періодично повторюваною коміркою з ребрами довжиною ε та $l\varepsilon$. Параметр x' визначає положення точки на сітці G_ε.

Подібна сітка розглядається в [4] з довільними дугами замість однорідних натягнутих струн. Згідно з [4], на множині G_ε визначається простір $H^1(G_\varepsilon)$ функцій, які є неперервними у вузлах та абсолютно неперервними на кожній струні, із нормою

$$\|u\|^2_{H^1(G_\varepsilon)} = \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} (|u|^2 + |\partial_{x'} u|^2)\,dx'. \tag{3}$$

Простір функцій $H^1_{\mathrm{per}}(G_\varepsilon) \subset H^1(G_\varepsilon)$, періодичних на $G_\varepsilon \bigcap \partial\Omega$, визначається аналогічно визначенню такого простору на Y. Надалі функцію $u_\varepsilon \in H^1(G_\varepsilon)$ зручніше розглядати як набір $2N$ функцій $u^\varepsilon_{1j}(x'_{1j})$ та $u^\varepsilon_{2j}(x'_{2j})$, визначених на прямих, отриманих періодичними продовженнями струн $\varepsilon\sigma_1$ та $\varepsilon\sigma_2$, які параметризовані координатами $x'_{1j} \in [0,1]$ та $x'_{2j} \in$ $\in [0,l]$, де $j = 1,\ldots,N$.

Отже, розглядається така крайова спектральна задача на сітці G_ε: знайти $u_\varepsilon \in H^1_{per}(G_\varepsilon)$ таку, що $\|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} = 1$ та

$$-\varepsilon^2 \partial^2_{x'_{1j}}(u^\varepsilon_{1j}) = \lambda_\varepsilon u^\varepsilon_{1j} \quad \text{при} \quad x'_{1j} \in [0,1], \quad -\varepsilon^2 \partial^2_{x'_{2j}}(u^\varepsilon_{2j}) = \lambda_\varepsilon u^\varepsilon_{2j} \quad \text{при} \quad x'_{2j} \in [0,l], \tag{4}$$

$$u^{\varepsilon}_{1j}(0)=u^{\varepsilon}_{1j}(1), \quad u^{\varepsilon}_{2j}(0)=u^{\varepsilon}_{2j}(l), \quad \partial_{x'_{1j}}u^{\varepsilon}_{1j}(0)=\partial_{x'_{1j}}u^{\varepsilon}_{1j}(1), \quad \partial_{x'_{2j}}u^{\varepsilon}_{2j}(0)=\partial_{x'_{2j}}u^{\varepsilon}_{2j}(l), \tag{5}$$

де $j = 1, \ldots, N$. Умови періодичності (5) та неперервності функцій і потоків у вузлах перетину струн сітки G_ε, які визначені для функцій $u^{\varepsilon}_{1j}(x'_{1j})$ та $u^{\varepsilon}_{2j}(x'_{2j})$, виконані автоматично, оскільки $u_\varepsilon \in H^1_{\mathrm{per}}(G_\varepsilon)$. Крім того, u^{ε}_{1j} та u^{ε}_{2j} є досить гладкими завдяки еліптичності цих рівнянь.

Задача на сітці (4), (5) має тривіальний розв'язок $u_\varepsilon = C$, де $|C| = l^{-1/2}$, для власного значення $\lambda_\varepsilon = 0$. Щоб виключити такий розв'язок із розгляду, визначимо простір $H^1_{\mathrm{per}*}(G_\varepsilon) = \{u \in H^1_{\mathrm{per}}(G_\varepsilon)\colon (u,1)_{L^2(G_\varepsilon)} = 0\}$ із нормою $\|u\|^2_{H^1_*(G_\varepsilon)} = \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} |\partial_{x'}u|^2 dx'$, яка еквівалентна нормі (3) на $H^1_{\mathrm{per}}(G_\varepsilon)$ внаслідок нерівності Пуанкаре. За визначенням, існують зчисленні множини власних значень λ^1_ε, $\lambda^2_\varepsilon, \ldots$ та ортонормованих власних функцій u^1_ε, $u^2_\varepsilon, \ldots$ цієї задачі таких, що $\alpha\varepsilon^2 \leqslant \lambda^1_\varepsilon \leqslant \cdots \leqslant \lambda^s_\varepsilon \leqslant \cdots$, з урахуванням кратності, де α є деякою додатною сталою та $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda^s_\varepsilon = \infty$.

3. Спектр Флоке. Відмінністю комплекснозначного випадку від дійснозначного є можливість знаходження великої кількості точних розв'язків, які описані в [2] на основі ідеї теорії Флоке для найпростішого фрагмента сітки. Ідеї теорії Флоке використовувалися раніше в [5] при усереднені спектральних задач із швидкоосцилюючими коефіцієнтами, де спектр Флоке із відповідними власними функціями називається також спектром Блоха із відповідними власними функціями. Наведемо, наприклад, для непарного N та $l = 1$ доведену у [2], таку теорему.

Теорема 1. *Для непарного N ($N = 2K + 1$ з $K \geqslant 1$) спектральна задача* (4), (5) *має власне значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2(n - \varepsilon M)^2$ при $M = 1, \ldots, N - 1$ та $n \in \mathbb{N}$, якому відповідає такий чотиривимірний власний підпростір:*

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon}_{1j} &= e^{-i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}Ae^{i2\pi(Nn-M)x_{1j}} + e^{i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}C_2e^{i2\pi(Nn-M)x_{1j}} + \\ &\quad + e^{-i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}C_1e^{-i2\pi(Nn-M)x_{1j}} + e^{i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}Ce^{-i2\pi(Nn-M)x_{1j}}, \qquad x_{1j} \in [0,1], \\ u^{\varepsilon}_{2j} &= e^{-i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}Ae^{i2\pi(Nn-M)x_{2j}} + e^{-i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}C_2e^{-i2\pi(Nn-M)x_{2j}} + \\ &\quad + e^{i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}C_1e^{i2\pi(Nn-M)x_{2j}} + e^{i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}Ce^{-i2\pi(Nn-M)x_{2j}}, \qquad x_{2j} \in [0,1], \end{aligned}$$

де A, C_1, C_2, C є довільними комплексними сталими та $j = 1, 2, \ldots, N$.

Випадок парного N дещо відрізняється та детальніше розглянутий у [2]. Такий підхід дає досить "багато" власних функцій та щільний спектр при великих N для задачі на дрібноперіодичній сітці. Однак і до такої спектральної задачі можна застосувати теорію усереднення для подальшого дослідження спектра.

4. Побудова та обгрунтування асимптотики. Будувати будемо асимптотику низькочастотного спектра, тобто використовувати власне значення $\lambda^0 = 0$ задачі на комірці (2) із власною функцією $N^0(y) = C$, де $|C| = l^{-1/2}$. При побудові початкових доданків асимптотичного розкладення для розв'язків задачі (4), (5) будемо дотримуватися принципів усереднення, сформульованих у роботі [6]. Розклад власної функції u_ε та власного значення λ_ε задачі (4), (5) шукатимемо у вигляді асимптотичних сум

$$u_a\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}\right) = u_0\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}\right), \qquad \lambda_a = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2, \tag{6}$$

де функції $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, $\ldots$, які визначені при $(x, y) \in Q \times Y$, розглядаються при $x = x'$, $y = x'/\varepsilon$, мають розділені зміни та є Y-періодичними за другим аргументом. Такі функції шукатимемо у вигляді $u_i = N_i(y)v_i(x)$, де завжди $N_i \in H^1_{\text{per}}(Y)$. З умов розв'язності задач для N_i можна отримати для функції $v(x)$, нормованої умовою $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, таку спектральну усереднену задачу:

$$\begin{aligned} &\partial^2_{x_1} v(x) + l\partial^2_{x_2} v(x) + (l+1)\lambda_2 v(x) = 0 \qquad \text{при} \qquad x \in \Omega, \\ &v(x) = v(x + l_i), \qquad \partial_x v(x) = \partial_x v(x + l_i) \qquad \text{при} \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

яка доповнена умовами періодичності у відповідності з (4), (5), де позначено $l_1 = 1$ та $l_2 = l$. Розв'язки цієї спектральної задачі визначаються зчисленними множинами власних значень

$$\lambda^s = 4\pi^2(l+1)^{-1}(n^2 + m^2 l^{-1})$$

при m, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, які упорядкуємо так, що $0 < \lambda^1 \leqslant \lambda^2 \leqslant \cdots$ (із урахуванням кратності, яка може дорівнювати 2, 4 або 8 залежно від l), та власних функцій $v^s_0(x)$, які матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &l^{-1/2} e^{i2\pi(nx_1 + ml^{-1}x_2)}, \qquad l^{-1/2} e^{i2\pi(nx_1 - ml^{-1}x_2)}, \\ &l^{-1/2} e^{i2\pi(-nx_1 + ml^{-1}x_2)}, \qquad l^{-1/2} e^{i2\pi(-nx_1 - ml^{-1}x_2)}, \end{aligned}$$

при m, $n \in \mathbb{N}$. Відомо [7], що $\lambda^s = 4\pi s l^{-1} + O(s^{1/2})$ при великих s. У результаті можна отримати для асимптотики власних значень та функцій такі зображення:

$$\lambda^s_a = \varepsilon^2 \lambda^s, \qquad u^s_a(x, y) = v^s_0(x) + \varepsilon^2 N_2(y)(\partial^2_{x_1} v^s_0(x) + \lambda^s v^s_0(x)),$$

де $N_2(y) \in H^1_{\text{per}}(Y)$ задовольняє систему рівнянь

$$-\partial^2_{y_1} N^1_2(y_1) = 1, \qquad -\partial^2_{y_2} N^2_2(y_2) = -l^{-1},$$

яка має розв'язок (визначений з точністю до постійної функції $AN^0(y)$), що нормується таким чином, щоб $\int\limits_Y N^0(y) N_2(y)\, dy = 0$. Функцію $N_2(y)$ будемо продовжувати по періодичності на всю сітку. Отже, функція $u^s_a(x', x'/\varepsilon)$ є визначеною на G_ε. Більш того, функція $u^s_a(x', x'/\varepsilon)$ автоматично задовольняє умови періодичності (5) та неперервності функцій і потоків у вузлах перетину струн сітки G_ε, оскільки функція $v^s_0(x)$, визначена на прямокутнику Ω, є гладкою та задовольняє умови періодичності на Ω, а функція $N_2(y)$ належить $H^1_{\text{per}}(Y)$ та є досить регулярною на Y як розв'язок еліптичного рівняння на хресті [4].

Обгрунтуванням побудованої асимптотики є нижченаведена теорема.

Теорема 2. *Для власних значень λ^s_ε та власних функцій u^s_ε задачі* (4), (5) *існує стала C, яка не залежить від ε та s, така, що*

$$|\lambda^s_\varepsilon - \varepsilon^2 \lambda^s| \leqslant C\varepsilon^3 (\lambda^s)^{3/2}, \qquad \|u^s_\varepsilon - v^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon(\lambda^s)^{1/2},$$

при $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$ і $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, де λ^s та v^s є власним значенням та власною функцією відповідної усередненої задачі, яка буде визначена надалі.

Оцінка цієї теореми виконана для всіх таких λ^s і u^s_ε, що $\lambda^s \leqslant c\varepsilon^{-2+\sigma}$ із деякою сталою c при $0 < \sigma \leqslant 2$ та $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (це і означає, що $\lambda^s \ll \varepsilon^{-2}$), але доведення цієї теореми може бути некоректним для $\lambda^s = c\varepsilon^{-2}$. Така ситуація є природною і пов'язана з наявністю в задачі (4), (5) високочастотного спектра, який буде розглянутий та обгрунтований у наступних дослідженнях.

Доведення теореми 2 для власних значень та власних функцій задачі (4), (5) з не дуже великими номерами ($s \ll \varepsilon^{-2}$) проводиться на основі твердження про заміну інтегралів по $\Omega = [0,1] \times [0,l]$ на інтеграли по дрібноперіодичній сітці G_ε, аналогу леми Рімана–Лебега та із застосуванням принципів мінімаксу, методу Рєлея–Рітца, які доведені в [7], та відомої теореми Вішика–Люстерніка [8].

5. Висновки та зауваження. У випадку $l = 1$ можна помітити такий цікавий факт. Для отриманих власних значень λ^s та відповідних власних функцій $v_0^s(x)$ усередненої задачі (7) оберемо $n = m$. Тоді матимемо власне значення $\lambda^s = 4\pi^2 m^2$, а відповідні власні функції обмежимо на сітку, тобто зафіксуємо, наприклад, для функції $e^{i2\pi(mx_1+mx_2)}$ координати $x_2 = \varepsilon/2,\ 3\varepsilon/2, \ldots, 1-\varepsilon/2$, які відповідають координатам горизонтальних струн, та $x_1 = \varepsilon/2,\ 3\varepsilon/2, \ldots, 1-\varepsilon/2$, які відповідають координатам вертикальних струн. У результаті ми отримаємо такі власні функції на кожній струні дрібноперіодичної сітки:

$$e^{i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{11}}, e^{i3\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{12}}, \ldots, e^{-i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{1N}};$$
$$e^{i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{21}}, e^{i3\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{22}}, \ldots, e^{-i\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{2N}}.$$

Оберемо для точного власного значення $\lambda_\varepsilon = 4\pi^2(n-\varepsilon M)^2$, яке описане в теоремі 1, значення $n = 1$ та $M = N - m$, $m = 1, 2, \ldots, N-1$. Тоді $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 4\pi^2 m^2$, а відповідні власні функції матимуть такий вигляд (із значеннями довільних констант $A = -1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ та $C = 0$):

$$u_{1j}^\varepsilon = -e^{-i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}e^{i2\pi(Nn-M)x_{1j}} = e^{i(2j-1)\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{1j}}, \qquad x_{1j} \in [0,1],$$
$$u_{2j}^\varepsilon = -e^{-i(2j-1)\pi\frac{M}{N}}e^{i2\pi(Nn-M)x_{2j}} = e^{i(2j-1)\pi m\varepsilon}e^{i2\pi m x_{2j}}, \qquad x_{2j} \in [0,1],$$

де $j = 1, 2, \ldots, N$. Таким чином, точний розв'язок, який побудований на основі теорії Флоке, збігається з усередненою поверхнею $v^s(x)$, яка розглянута на сітці G_ε.

Аналогічно перевіряється відповідність між усередненою поверхнею $e^{i2\pi(-mx_1+mx_2)}$ та точними власними функціями $(u_{1j}^\varepsilon, u_{2j}^\varepsilon)$ із значеннями довільних констант $A = 0$, $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, $C = 0$; між $e^{i2\pi(mx_1-mx_2)}$ та $(u_{1j}^\varepsilon, u_{2j}^\varepsilon)$ із значеннями довільних констант $A = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, $C = 0$; а також між $e^{i2\pi(-mx_1-mx_2)}$ та $(u_{1j}^\varepsilon, u_{2j}^\varepsilon)$ із значеннями довільних констант $A = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C = -1$.

Отже, нами побудовано асимптотику для власних значень та комплекснозначних власних функцій спектральної задачі на сітці (4), (5), а також наведено теорему, що є обгрунтуванням побудованих асимптотик. Крім того, встановлено відповідність між точними розв'язками задачі на дрібноперіодичній сітці та наближеними розв'язками, які були отримані в результаті побудови асимптотики.

1. *Krylova A. S., Sandrakov G. V.* Homogenization of spectral problem on small-periodic networks // J. Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – **8**, No 4. – P. 336–356.
2. *Крилова А. С., Сандраков Г. В.* Комплексні власні підпростори спектральної задачі на сітці // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2012. – № 3(109). – С. 81–96.
3. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – Москва: Физматлит, 2005. – 272 с.

4. *Мазья В. Г., Слуцкий А. С.* Осреднение дифференциального оператора на мелкой периодической криволинейной сетке // Math. Nachr. – 1987. – **133**. – С. 107–133.
5. *Allaire G., Conca C.* Bloch wave homogenization and spectral asymptotic analysis // J. Math. Pures et Appl. – 1998. – **77**. – P. 153–208.
6. *Сандраков Г. В.* Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами // Мат. сб. – 1989. – **180**, № 12. – С. 1634–1679.
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: Т. 4. Анализ операторов. – Москва: Мир, 1982. – 428 с.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, вып. 5. – С. 3–122.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 29.11.2012

А. С. Крылова, Г. В. Сандраков

Асимптотический анализ спектральной задачи на мелкопериодической сетке

Рассмотрены осреднение и асимптотический анализ спектральной задачи на мелкопериодической сетке с периодическими краевыми условиями. Приведена оценка, обосновывающая полученную осредненную асимптотику. Методом теории Флоке построены точные собственные функции и значения задачи на сетке. Установлено соответствие между осредненными асимптотиками и точными собственными функциями и значениями Флоке.

A. S. Krylova, G. V. Sandrakov

Asymptotic analysis of spectral problems on small-periodic networks

The homogenization and the asymptotic analysis of a spectral problem on small-periodic networks with periodic boundary conditions are considered. An estimate that is a justification of the homogenized asymptotics is presented. Explicit eigenfunctions and eigenvalues of the network problem are constructed by methods of Floquet's theory. The equivalence between the homogenized asymptotics and the explicit Floquet's eigenfunctions and eigenvalues is established.