УДК 517.5

**Р. М. Тригуб**

# Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)*

*Найден точный порядок приближения произвольных периодических функций тригонометрическими полиномами Бернштейна–Стечкина. Для этого пришлось ввести специальный модуль гладкости.*

С. Б. Стечкин [1] доказал следующее общее неравенство: при любом $s \in \mathbb{N}$ для любой непрерывной $2\pi$-периодической функции $f$ существует последовательность тригонометрических полиномов $\tau_{s,n}(f)$ порядка не выше $n$ такая, что

$$\|f - \tau_{s,n}\| \leqslant \gamma(s)\omega_s\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{1}$$

Здесь и ниже норма в $C[-\pi, \pi]$, а модуль гладкости порядка $s$ и шага $h > 0$ по определению равен

$$\omega_s(f, h) = \sup_{0<\delta\leqslant h} \|\Delta_\delta^s f(.)\|, \qquad \Delta_\delta^1 f(x) = f(x) - f(x + \delta).$$

Через $\gamma(\ldots)$ с разными индексами будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие лишь от величин, стоящих в скобках.

Ранее такую прямую теорему при $s = 1$ доказал Д. Джексон, а при $s = 2$ — А. Зигмунд в случае $\omega_2(f, h) = O(h)$ и Н. И. Ахиезер в общем случае (см., например, [2]).

Для доказательства (1) при $s \geqslant 3$ использовались полиномы, построенные С. Н. Бернштейном в доказательстве такого же неравенства при $\omega_s(f, h) = O(h^\alpha)$, $\alpha > 0$ [3].

Автором уже довольно давно указаны полиномы $\widetilde{\tau}_{s,n}(f)$ со свойством

$$\|f - \widetilde{\tau}_{s,n}(f)\| \asymp \omega_s\left(f, \frac{\pi}{n}\right)$$

(двойное неравенство с положительными константами, зависящими лишь от $s$). Более того, найдены точные порядки приближения индивидуальных функций классическими методами суммирования рядов Фурье. При этом пришлось вводить специальные модули гладкости и K-функционалы (особенно, в многомерном случае) (см. [4]). Такие результаты в настоящее время называют "strong converse theorems" (см., например, [5] и библиогр. там же).

Здесь укажем точный порядок приближения полиномами Бернштейна–Стечкина. Тем самым получим ответ на один из вопросов, поставленных В. И. Ивановым на международной конференции в Москве (2010) (см. [6], видео доклада).

Эти полиномы имеют вид ($D_n$ — ядро Дирихле)

$$\tau_{s,rn(f)} = \tau_{s,rn(f,x)} = \gamma_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \Delta_t^s f(x)] D_n^r(t)\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_n\left(\frac{|k|}{2n+1}\right) \widehat{f}_k e^{ikx},$$

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du$$

($\gamma_0 = \gamma_0(r, n)$ определяется из условия: при $f_0 \equiv 1$ и $\tau_{s,rn}(f_0) \equiv 1$).

В отличие от классических полиномов $\phi_n(x) = 1$ не только при $x = 0$. Поэтому такой же оценки приближения снизу, как в (1) сверху, быть не может.

Введем усреднения специальных разностных операторов, связанных с данной точкой $t \in \mathbb{R}$.

При $t = 0$ и $r \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\Delta}^r_{h,0} f(x) = \int\limits_0^1 \Delta^r_{hu} f(x)\, du.$$

В этом случае еще

$$\|\widetilde{\Delta}^r_{h,0} f(\cdot)\| \asymp \omega_r(f, h)$$

(двойное неравенство с положительными константами, зависящими лишь от $r$) (см. [4, с. 363]).

А при $t \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, положим

$$\widetilde{\Delta}^1_{h,t}(f, x) = \int\limits_0^1 [\Delta^1_{hu} f(x) - \lambda \Delta^2_{hu} f(x)]\, du \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi^t(kh)\widehat{f}_k e^{ikx},$$

где

$$\lambda = \lambda(t) = \frac{2(it + 1 - e^{it})}{2it + 3 - 4e^{it} + e^{2it}}$$

(вещественная часть знаменателя $2(1 - \cos t)^2 > 0$), а

$$\psi^t(x) = 1 - \lambda + (2\lambda - 1)\frac{e^{ix} - 1}{ix} - \lambda\frac{e^{2ix} - 1}{2ix}, \qquad \psi^t(0) = \psi^t(t) = 0.$$

**Теорема 1.** *Пусть $r \geqslant 6$, $2 \leqslant s \leqslant r - 2$ и $s_1 = 2[(s + 1)/2]$. Существует число $\gamma_0(r)$ такое, что при $n \geqslant \gamma_0(r)$ и $h_n = 2\pi/(r(2n + 1))$*

$$\|f - \tau_{s,rn}(f)\| \asymp \|\widetilde{\Delta}^{s_1-2p}_{h_n,0} \prod_1^p \widetilde{\Delta}_{h_n,x_{j,n}} \widetilde{\Delta}_{h_n,-x_{j,n}} f(\cdot)\|,$$

*где $\{x_{j,n}\}_1^p$ — положительные корни уравнения $\phi_n(x) = 1$. (Здесь указано двойное неравенство с константами, не зависящими от $f$ и $n$.)*

Приведем эскиз доказательства.

**Лемма 1.** *При $r \geqslant 6$, $2 \leqslant s \leqslant r - 2$, $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$*

$$|\phi(x) - \phi_n(x)| + \frac{1}{n}|\phi'(x) - \phi'_n(x)| \leqslant \frac{\gamma_1(r)}{n^2},$$

*где*

$$1 - \phi(x) = \gamma_2(s, r) \sum_{\nu=0}^{s} (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} B(\nu x),$$

*а $B$ — базисный сплайн Шенберга с узлами в целых точках при четном $r$ и в полуцелых при нечетном $r$, степени $r-1$, минимального дефекта и с носителем $[-r/2, r/2]$.*

Далее у производных $B$-сплайна определено число нулей и их расположение, а из информации о нулях уравнения $\phi(x) = 1$ получена информация о нулях уравнения $\phi_n(x) = 1$.

**Лемма 2.** *Уравнение $\phi_n(x) = 1$ имеет в нуле корень кратности $s_1$, а число $p$ различных положительных корней при $n \geqslant \gamma_0(r)$ постоянное, не более $[s/2]$ и все эти корни простые.*

**Лемма 3.** *Функция $\psi^t$ имеет при $0 < |t| \leqslant \pi$ только два нуля $x = 0$ и $x = t$ и оба нули — простые.*

Доказательство проводится методом мультипликаторов (см. [4, гл. 6, 7]).

Нужно убедиться, что

$$g_n(x) = \frac{1 - \phi_n(x)}{(\psi^0(x))^{s_1 - 2p} \prod_{j=1}^{p} \psi^{x_{j,n}}(x) \psi^{-x_{j,n}}(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} d\mu_n(y)$$

и полная вариация комплекснозначной борелевской меры $\mu_n$ ограничена по $n$. Это для оценки приближения сверху. А для оценки приближения снизу нужно проверить, что и $1/g_n$ обладает таким же свойством.

Для представления двух функций в виде преобразования Фурье меры используются приведенные леммы 1–3 и одна теорема Берлинга (более общую теорему см. в [4, 6.4.2]).

Отметим еще, что из двойного неравенства в теореме для нормы $C[\pi, \pi]$ следует такое же неравенство (с теми же константами) и для нормы $L_p[\pi, \pi]$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. [4]). Из оценки в теореме приближения сверху следует усиление теоремы Джексона–Стечкина (см. также [7]). А по поводу представления функций в виде преобразования Фурье меры недавно вышла обзорная статья [8].


1. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219–242.
2. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – Москва: Физматгиз, 1960. – С. 624.
3. *Бернштейн С. Н.* О свойствах однородных функциональных классов // Докл. АН СССР. – 1947. – **57**. – С. 111–114. (См. также: Собрание сочинений / С. Н. Берштейн. – Москва, 1954. – Т. 2. – С. 422).
4. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Dordrecht: Kluwer, 2004. – 585 p.
5. *Draganov B. R.* Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators // J. Appr. Theory. – 2010. – **162**. – P. 952–979.
6. *Иванов В. И.* О работах С. Б. Стечкина по теории приближения функций // Междунар. конф. “Теория приближений”, посвященная 90-летию со дня рождения С. Б. Стечкина. – Москва, 23–26 авг., 2010 г. – www/mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=449.
7. *Коломойцев Ю. С., Тригуб Р. М.* Об одном неклассическом методе приближения периодических функций тригонометрическими полиномами // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 3. – С. 356–374.
8. *Liflyand E., Samko S., Trigub R.* The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overviev // Anal. Math. Phys. – 2012. – **2**. – P. 1–68.


*Донецкий национальный университет*

*Поступило в редакцию 03.12.2012*

**Р. М. Тригуб**

## Точний порядок наближення довільних періодичних функцій тригонометричними поліномами Бернштейна–Стєчкіна

*Знайдено точний порядок наближення довільних періодичних функцій тригонометричними поліномами Бернштейна–Стечкіна. Для цього підійшов лише спеціальний модуль гладкості.*

**R. M. Trigub**

## Exact order of approximation of arbitrary periodic functions by Bernstein–Stechkin trigonometric polynomials

*The exact order of approximation of arbitrary periodic functions by Bernstein–Stechkin trigonometric polynomials is found. In order to do this, it was necessary to introduce a special module of smoothness.*