ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2013

УДК 517.946

Академик НАН Украины **Ю. Г. Кривонос, И. Т. Селезов**

О моделировании диагностики включений в упругом теле

Применительно к моделированию диагностики включений в упругом теле рассматривается существование обобщенных решений двух смешанных задач эластодинамики в прямоугольной области при возбуждении на границе.

При проведении неразрушающей дефектоскопии необходимо увеличение информативности, сопряжения с системами автоматической обработки и регистрации информации. Учет дополнительных эффектов при упругом деформировании тел расширяет возможности получения информации о напряженно-деформированном состоянии таких тел. Наличие любого дефекта или повреждения в теле приводит к дифракции волн и рассеянное поле несет информацию о виде препятствия (форма, физические свойства) [1]. При этом внутри тела могут иметь место поверхности раздела с резкими изменениями свойств. Соответствующий диагностический параметр определяется из рассеянного поля обобщенного решения задачи рассеяния [2].

Диагностика включений приводит к решению обратной задачи, которая в общем случае относится к некорректным задачам математической физики, и для определения единственного решения требуется дополнительная информация. В качестве примера отметим работу [3], в которой построено решение обратной задачи рассеяния электромагнитных волн на неоднородной цилиндрической анизотропной плазме и выделено единственное решение.

В данной работе сформулированы две смешанные задачи теории дифракции и доказываются теоремы существования обобщенных решений. В этом случае в качестве диагностических параметров выступают скачки функций в обобщенных решениях, характеризующие резкие изменения свойств среды.

Рассматривается плоская задача для упругой изотропной среды в прямоугольной области, внутри которой имеется упругое включение прямоугольной формы. На некотором участке границы задано высокочастотное возбуждение, которое может моделировать стационарные колебания и импульсное воздействие.

Рассмотрим упругое изотропное тело, занимающее область Ω в R^3 с границей $\partial\Omega$. В теле расположен дефект, который также является упругим изотропным телом. Он занимает область $\Omega_1 \subset \Omega$, так что основное тело занимает область $\Omega_0 = \Omega/\Omega_1$. Введем в рассмотрение обычные поля теории упругости: поле $\vec{u}(x,t)$ вектора перемещений, поле $\varepsilon(x,t)$ тензора деформаций, поле $\tau(x,t)$ тензора напряжений. Здесь $x \in \Omega$, $t \geqslant 0$.

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор теории упругости [4]

$$A\vec{u} = -\{\vec{\nabla}[(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\cdot\vec{u}] + \vec{\nabla}\cdot[\mu\vec{\nabla}\vec{u}]\},$$

где λ, μ — коэффициенты упругости Ламе.

Вектор перемещений $\vec{u}(x,t)$ удовлетворяет в Ω дифференциальному уравнению динамической теории упругости

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + A\vec{u} = 0, \tag{1}$$

где ρ — плотность упругой среды.

Производные, входящие в $A\vec{u}$, для случая разрывных коэффициентов будем понимать в смысле обобщенных функций со значениями в R^3. Производную по t, входящую в (1), будем понимать как производную от обобщенной функции $\vec{u}$ по параметру t.

Введем в пространстве R^4 переменных x_i, t цилиндрические области

$$Q_{i\infty} = \Omega_i \times (0,\infty), \qquad i = 0,1, \qquad Q_\infty = \Omega \times (0,\infty).$$

Лемма. *Пусть $\vec{u}(x,t)$ удовлетворяет в Ω_∞ уравнению (1), где производные понимаются в смысле обобщенных функций. Если при этом и $\vec{u} \in C^2(Q_{i\infty})$, где $i = 0,1$, и $\vec{u} \in C^2(Q_\infty)$, то $\vec{u}$ удовлетворяет в классическом смысле в областях $Q_{i\infty}$, уравнениям*

$$\rho_i\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + A_i\vec{u} = 0, \tag{2}$$

где

$$A_i = -[(\lambda_i+\mu_i)\operatorname{grad}\operatorname{div} + \mu_i\Delta],$$

а на поверхности $\partial\Omega_i$ — условиям

$$[\vec{t}(\vec{u})] = 0. \tag{3}$$

Здесь скобки [ ] обозначают скачок соответствующей величины при переходе через поверхность $\partial\Omega_0$, а $\vec{t}(\vec{u})$ представляет собой вектор напряжений на поверхности $\partial\Omega_0$ с компонентами $\tau_{ik}\vec{n}_k$, где $\vec{n}_k$ — орты внешней нормали к поверхности $\partial\Omega_0$.

Доказательство леммы легко следует из формулы Грина для оператора теории упругости

$$\int\limits_\Omega A\vec{u}\cdot\vec{v}dx = a(\vec{u},\vec{v}) - \int\limits_\Omega [\vec{t}(\vec{u})]\cdot\vec{v}ds$$

Задача 1. Пусть граница тела $\partial\Omega$ разбита на три части ненулевой меры: $\partial\Omega = \partial\Omega_u \bigcap \bigcap \partial\Omega_r \bigcap \partial\Omega_\delta$. Требуется найти векторную функцию $\vec{u}(x,t)$, которая удовлетворяет:

а) уравнению (2), где $i = 0$ при $x \in \Omega_0$, $t > 0$ и $i = 1$ при $x \in \Omega_1$, $t > 0$;

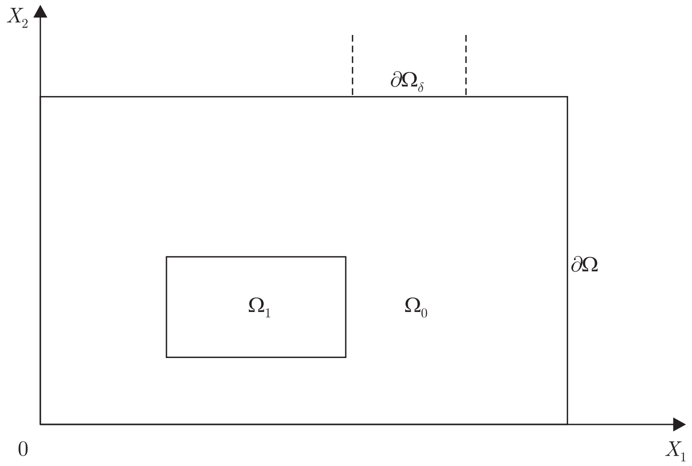

Рис. 1. Геометрия задачи

б) граничным условиям

$$\vec{u} = 0 \qquad (x \in \partial\Omega_u), \qquad \vec{t}(\vec{u}) = 0 \qquad (x \in \partial\Omega_\tau), \qquad \vec{t}(\vec{u}) = \vec{\varphi} \qquad (x \in \partial\Omega_\delta); \tag{4}$$

в) начальным условиям

$$\vec{u}(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = 0 \qquad (x \in \Omega); \tag{5}$$

г) условиям сопряжения (3) на $\partial\Omega_1$.

Эта задача описывает движение тела с включениями под действием нагрузки $\vec{\varphi}(x, t)$, приложенной на участке $\partial\Omega_\delta$ границы тела $\partial\Omega$. Нагрузка $\vec{\varphi}(x, t)$ моделирует воздействие излучателя, находящегося на участке $\partial\Omega_\delta$ (рис. 1).

Направление вектора $\vec{\varphi}$ в реальных ситуациях может быть различным [2]: от нормального до касательного. Примем для вектора $\vec{\varphi}$ следующие выражения:

$$\vec{\varphi} = H(x)f(t)\cos\omega t\vec{\varphi}_0(x), \qquad \|\vec{\varphi}_0\| = 1.$$

Функция $f(t)$ описывает огибающую воздействия. Можно принять для простоты $f(t) = \theta(t)\theta(\tau_\rho - t)$, где τ_p — время воздействия.

Если $f(t) = 1$, то воздействие излучателя на тело носит немодулированный гармонический характер. В этом случае представляет интерес изучение стационарных гармонических колебаний тела с частотой ω. При этом игнорируются начальные условия (5).

Будем в этом случае искать решение задачи в виде

$$\vec{u}(x, t) = \mathrm{Re}\,\vec{V}(x)e^{-i\omega t},$$

где $\vec{V}(x)$ — вещественнозначная векторная функция. Тогда, очевидно, $\vec{u} = \vec{V}\cos\omega t$ и граничные условия (4) переходят в следующие:

$$\vec{V} = 0 \qquad (x \in \partial\Omega_u), \qquad \vec{t}(\vec{v}) = 0 \qquad (x \in \partial\Omega_\tau), \qquad \vec{t}(\vec{v}) = \vec{\psi} \qquad (x \in \partial\Omega_\delta), \tag{6}$$

где $\vec{\psi} = H(x)\vec{\varphi}_0$. Уравнения (2) переходят в уравнения

$$(-A_i + \rho_i\omega^2)\vec{V} = 0. \tag{7}$$

Уравнения (7) образуют систему уравнений эллиптического типа. Однородные условия сопряжения (3) сохраняют свой вид:

$$[\vec{t}(\vec{V})] = 0. \tag{8}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче.

Задача 2. Найти векторную функцию $\vec{V}(x)$, удовлетворяющую в областях Ω_i уравнениям (7), а на их границах — граничным условиям (7) и (8).

Очевидно, задачи 1 и 2 не могут иметь классического решения. Действительно, классическое решение — это функция класса $C^1(\vec{Q}_\infty)$. В силу того, что граничные условия (4) и (6) меняют свой характер при переходе через границы участков $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_\tau$, $\partial\Omega_\delta$, невозможно гарантировать непрерывность первых производных решений на $\partial\Omega$. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема. *Существует единственное обобщенное решение задачи 1.*

Доказательство этой теоремы достаточно громоздко и здесь мы его не приводим, ограничившись краткими комментариями. Обобщенное решение представляет собой функцию из некоторого пространства С. Л. Соболева [5], которая удовлетворяет интегральному тождеству, заменяющему обычные соотношения, указанные в формулировке задачи 1. Для случая простых граничных условий подобная теорема доказана, например, в работе [6]. Дадим вариант определения обобщенного решения задачи 2. Заметим, что он вытекает из общей схемы введения обобщенных решений для эллиптических краевых задач [7] как частный случай. Применительно к задачам теории упругости эта схема изложена в [6].

Введем гильбертово пространство $H = [L_2(\Omega)]^3$, а также гильбертово пространство V, представляющее собой замыкание в норме пространства $[W_2^1(\Omega)]^3$ множества векторных функций класса $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности $\partial\Omega_u$. Таким образом,

$$H = [L_2(\Omega)]^3, \qquad V = \{\vec{V} \colon \vec{V} \in [W_2^1(\Omega)]^3, \vec{V}|_{\partial\Omega_u} = 0\}.$$

Обобщенным решением краевой задачи 2 называется векторная функция $\vec{V} \in V$, такая, что для любой функции $\vec{\eta} \in V$ имеет место вариационное тождество

$$\alpha(\vec{V}, \vec{\eta}) - \omega^2 \int\limits_\Omega \rho(\vec{V} \cdot \vec{\eta})\, dx = \int\limits_{\partial\Omega_\delta} \vec{\psi} \cdot \vec{\eta} ds.$$

Здесь билинейная форма $\alpha(\vec{V}, \vec{\eta})$ задается равенством

$$\alpha(\vec{V}, \vec{\eta}) = \int\limits_\Omega [\lambda\varepsilon_{ij}(\vec{V})\varepsilon_{ij}(\vec{\eta}) + 2\mu\varepsilon_{ik}(\vec{V})\varepsilon_{ik}(\vec{\eta})]\, dx.$$

В случае ограниченной области Ω задача 2 принадлежит к числу так называемых регулярных эллиптических краевых задач. Для таких краевых задач имеет место свойство фредгольмовости: при любом ω однородная задача имеет не более чем конечное число линейно независимых решений. На самом деле такие решения существуют только при значениях ω, совпадающих с частотами собственных колебаний рассматриваемого тела. В этом случае решение задачи 2 существует, если выполнены определенные условия ортогональности нагрузки к решениям однородной задачи. Легко убедиться, что задача 2 является самосопряженной и поэтому требование ортогональности к нетривиальным решениям сопряженной задачи совпадает с требованием ортогональности к нетривиальным решениям исходной задачи 2. Если ω не совпадает ни с одной частотой собственных колебаний, то существует единственное решение для всех нагрузок, т. е. для всех функций $H(x)\vec{\varphi}_0(x)$. При этом необходимо, конечно, уточнение понятия решения и условий, накладываемых на функцию $H(x)$ и поле направлений $\vec{\varphi}_0(x)$. Если же область Ω является неограниченной, то в условиях задачи 2 необходимо добавить условие излучения.

1. *Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г.* Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – Киев: Наук. думка, 2012. – 232 с.
2. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике. – Москва: Наука, 1966. – 166 с.
3. *Селезов И. Т.* К обратным задачам диагностики плазменных неоднород-ностей // Распределенное управление процессами в сплошных средах. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1972. – С. 22–48.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – Москва; Ленинград: ОНТИ, 1935. – 674 с.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Москва: Наука, 1988. – 333 с.
6. *Вильке А. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. – Москва: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1986. – 192 с.
7. *Гончаренко В. М.* Основы теории уравнений с частными производными. – Киев: Выща шк., 1985. – 311 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.12.2012

Академік НАН України **Ю. Г. Кривонос, І. Т. Селезов**

Про моделювання дігностики включень у пружному тілі

Стосовно моделювання діагностики включень у пружному тілі розглядаеться існування узагальнених розв'язків двох змішаних задач еластодинаміки в прямокутній області при збудженні на границі.

Academician of the NAS of Ukraine **Yu. G. Krivonos, I. T. Selezov**

On the inclusion diagnostics modeling for an elastic body

The existence of generalized solutions of two mixed problems of elastodynamics under the boundary excitation is considered in connection with the diagnostics of inclusions in an elastic body.