

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко, И. А. Сышко**

Моделирование одного класса сложных систем с нечетким управлением

Исследуется одна задача Стефана с учетом конвекции в жидкой фазе. Построено приближенное решение этой задачи с использованием малого параметра. Управление процессом осуществляется с применением нечеткой логики.

Постановка задачи. Рассмотрим следующий вариант кристаллизации металла. Пусть полубесконечный круговой цилиндр $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_3 < 0\}$ заполнен веществом, которое находится в двух фазовых состояниях — твердом и жидком. В рассматриваемой модели теплофизические параметры (свой в каждой фазе) считаются постоянными величинами. Пусть далее Γ_t — достаточно гладкая поверхность, граничные точки которой S лежат на Γ -боковой поверхности цилиндра Ω , т. е. $S \in \Gamma$, и пусть Γ_t отделяет твердую фазу от жидкой. Обозначим через Ω_t^+ область, заполненную жидким веществом, через Ω_t^- — область, занятую твердым веществом, боковые границы этих областей — соответственно через Γ^- и Γ^+ , верхний участок границы цилиндра Ω — через H . Рассмотрим случай, когда каждая фаза Ω_t^\pm представляет собой односвязную область и для каждого момента времени $t > 0$ не является пустым множеством. Двухфазная задача Стефана, при наличии конвективных движений в жидкой фазе, состоит в определении скорости жидкости $\vec{V}(x, t)$, распределения температур $u^+(x, t)$ и $u^-(x, t)$ соответственно в жидкой и твердой фазах, свободной поверхности Γ_t и давления $p(x, t)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+(x, t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x, t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x, t) &= 0, & (x, t) \in D_T^+, \\ \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x, t) &= 0, & (x, t) \in D_T^+, \\ \frac{\partial \vec{V}(x, t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}(x, t) + \vec{f}(u^+), \\ \nabla \vec{V}(x, t) &= 0, & (x, t) \in D_T^+, & u^\pm(x, 0) = A^\pm(x), \\ \frac{\partial u^\pm}{\partial n} + \omega_0^\pm u^\pm &= 0, & (x, t) \in \Gamma^- \cup \Gamma^+, & \vec{V}(x, 0) = \vec{C}(x), & \vec{V}(x, t) = 0, \\ x \in \Gamma^+ \cup H, & \frac{\partial u^+}{\partial x_3}(x, t) = q(x), & (x, t) \in H; & u^\pm(x, t) = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \left[k_- \frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right] \cos(n \wedge x_i) + k \cos(n \wedge t) &= 0, & (x, t) \in \Gamma_t, \end{aligned} \quad (1)$$

где $D_T^\pm(x, t) : x \in \Omega_t^\pm, t \in (0, T), x = (x_1, x_2, x_3), \omega_0^\pm, \text{Re}, k, k_-, k_+$ — заданные положительные константы; $q(x)$ — известная положительная, достаточно гладкая функция; $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$. Здесь также $a_+^2 = \lambda_+/\text{Re}_- \rho_+, a_-^2 = \lambda_-/\text{Re}_- \rho_-$, а $\lambda_\pm, c_\pm, \rho_\pm$ —

известные теплофизические параметры. Предполагается, что $\vec{C}(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $A^\pm(x) \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $\vec{f}(u^+) \in C^2(R^1)$, $q(x) \in H^{2+\alpha}(H)$, где Ω_0^\pm — области со свободной границей Γ_0 , которые возникают при рассмотрении стационарной задачи без конвекции с теми же условиями из (1) при $\text{Re} = 0$.

Задача (1) моделирует процесс кристаллизации металла при электрошлаковом переплаве с учетом конвективного переноса тепла, реально присутствующем в жидкой фазе. Наконец, разрешимость класса задач типа (1) в пространстве $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ изложена в [1].

Приближенные решения задачи (1). Введем криволинейные координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ для точек поверхности Γ_0 и будем искать поверхность Γ_t в следующем виде: $\Gamma_t = \{x(\omega) + \vec{n}\rho(\omega, t)\}$, где $\rho(\omega, t)$ — функция класса $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0, T])$, $\rho(\omega, 0) = 0$; $\vec{n}(\omega)$ — нормаль к Γ_0 , направленная внутрь Ω_0^+ , $x(\omega) \in \Gamma_0$ [2, 3].

Предположим, что решения задачи (1) можно разложить в ряд по степеням Re : $u^\pm(x, t, \text{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k u_k^\pm(x, t)$, $p(x, t; \text{Re}) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k p_k(x, t)$, $V_i(x, t, \text{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k V_{ik}(x, t)$, $\rho(\omega, t; \text{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k \rho_k(\omega, t)$. Справедливы утверждения.

Лемма. Пусть выполнены условия: $\nabla^2 A^\pm(x) = 0$, $x \in \Omega_0^\pm$, $\partial A^+/\partial n + \omega_0^\pm A^\pm = 0$, $x \in \Gamma^- \cup \Gamma^+$, $\partial A^+/\partial x_3 = q(x)$, $x \in H$; $\vec{C}(x) = 0$, $x \in \Omega_0^+$; $A^\pm(x)|_{\Gamma_0} = 0$ и $k_- |\nabla A^-(x)| = k_+ |\nabla A^+(x)|$ на Γ_0 . Тогда в качестве нулевого приближения $u_0^\pm(x)$ можно взять функции $A^\pm(x)$, а свободная поверхность Γ_0 принадлежит классу C^∞ в каждой точке, лежащей внутри цилиндра Ω .

Теорема. Пусть выполнены условия леммы и пусть справедливы соотношения: $\nabla p_0(x) = 0$, $\nabla p_1(x, 0) = 0$, $x \in \Gamma_0$ и $c(k_+ + k_-)T/k < 1$, где c — некоторая постоянная [4, с. 364], тогда существуют первые приближения $u_1^\pm(x, t)$, $\vec{V}_1(x, t)$, $p_1(\omega, t)$ и $u_2^\pm(x, t)$, $\vec{V}_2(x, t)$, $p_2(\omega, t)$ задачи (1), причем функции $u_1^\pm(x, t)$ и $u_2^\pm(x, t)$ принадлежат классу $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\tilde{D}_T^\pm)$, а $p_1(\omega, t)$ и $p_2(\omega, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\tilde{\Gamma}_T)$. И, кроме того, при малых числах Re и достаточно малых значениях t справедлива формула Γ_t :

$$x = x(\omega) - \text{Re} \vec{n} \frac{u_1^\pm(x(\omega), t)}{|\nabla A^\pm(x(\omega))|} - (\text{Re})^2 \vec{n} \frac{u_2^\pm(x(\omega), t) - f_1^\pm(x(\omega), t)}{|\nabla A^\pm(x(\omega))|} + o((\text{Re})^2),$$

$$x(\omega) \in \Gamma_0.$$

Нечеткое управление процессом кристаллизации. Пусть u^* — температура, которую должна достичь поверхность $\partial\Omega = \Gamma \cup H$. Данная задача возникает в металлургии при отделении выплавленного слитка от стенок кристаллизатора [5]. Эта температура достигается за счет воздействия тепловых потоков мощности w_1 , w_2 , w_3 , причем поток w_3 равномерно распределен в центре H , а два других потока w_1 , w_2 сконцентрированы по краям $\Gamma \cup H$. Далее предлагается метод нечеткого управления в данном классе задач.

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — факторы, влияющие на процесс кристаллизации, а Y_1, Y_2, \dots, Y_n — условия, при которых происходит появление нового слитка. Тогда нечеткое управление в нашей задаче представляется в виде функционального отображения: $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \rightarrow Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$.

Для краткости изложения в качестве терм-множества лингвистических переменных x_1, x_2, x_3 , где $x_1 = \{\text{“температура”}\}$, $x_2 = \{\text{“способ нагрева”}\}$, $x_3 = \{\text{“слиток металла”}\}$ будем использовать множества: $T = \{\text{“минимальная”, “средняя”, “максимальная”}\}$, $W =$

= {"минимальный", "средний", "максимальный"}, $L = \{\text{"минимальный", "средний", "максимальный"}\}$.

Таким образом, имеем $x = \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow y \in [\alpha, \beta]$, где α и β — некоторые числа (они выбираются таким образом, чтобы произошло отделение слитка от стенок кристаллизатора [5]), а для выходной лингвистической переменной y (температура поверхности слитка) будет использоваться терм множество $Q = \{\text{"минимальная", "средняя", "максимальная"}\}$. Для численной реализации задачи использовались следующие значения параметров [5]: $400 \text{ мм} \leq L \leq 6000 \text{ мм}$, $2500 \text{ МВт/м}^2 \leq W \leq 5000 \text{ МВт/м}^2$. Численный расчет, позволяющий построить графически нечеткое управление, был осуществлен с помощью стандартного алгоритма Мамдани.

Замечания. Приближенное решения класса задач типа (1) изложено в [6] и [7].

1. Шевченко А. И., Миненко А. С. Методы исследования нелинейных моделей. — Киев: Наук. думка, 2012. — 132 с.
2. Миненко А. С. Вариационные задачи со свободной границей. — Киев: Наук. думка, 2005. — 341 с.
3. Шевченко А. И., Миненко А. С. Задача Стефана при наличии конвекции // Доп. НАН України. — 2012. — № 1. — С. 25–29.
4. Ладыженская О. А., Салонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — Москва: Наука, 1967. — 756 с.
5. Патон Б. Е. Избранные труды. — Киев: Изд. Ин-та электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины, 2008. — 893 с.
6. Шевченко А. И., Миненко А. С. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Доп. НАН України. — 2010. — № 5. — С. 36–40.
7. Шевченко А. И., Миненко А. С., Золотухина О. А. Численный анализ одной нелинейной математической модели // Там само. — 2012. — № 9. — С. 44–47.

Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступило в редакцию 11.02.2013

Член-корреспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко, І. О. Сипко**

Моделювання одного класу складних систем з нечітким керуванням

Досліджується одна задача Стефана з урахуванням конвекції в рідкій фазі. Побудовано наближений розв'язок цієї задачі з використанням малого параметра. Керування процесом здійснюється за допомогою нечіткої логіки.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko, I. A. Sytko**

Modeling of one class of complex systems with fuzzy control

The Stefan problem with convection in the liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed, using the method of small parameter. The control over this process with the use of fuzzy logic is realized.