Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517+519.2

І. П. Мазур

До теореми Скитовича–Дармуа на $\boldsymbol{a}$-адичних соленоїдах

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

Нехай X — компактна зв'язна абелева група. Відомо, що існують топологічні автоморфізми α_j, β_j групи X та незалежні випадкові величини ξ_1 та ξ_2 зі значеннями в X та розподілами μ_1, μ_2 такими, що лінійні форми $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ незалежні, але μ_1 та μ_2 не є згортками гауссівських та ідемпотентних розподілів. Доведено, що існують компактні зв'язні абелеві групи X, які мають таку властивість: із незалежності трьох лінійних форм від трьох незалежних випадкових величин зі значеннями в X випливає, що якнайменш один розподіл є ідемпотентним. Такими групами є деякі $\boldsymbol{a}$-адичні соленоїди.

Класична теорема Скитовича–Дармуа стверджує: нехай ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \geqslant 2$, — незалежні випадкові величини, α_i, β_i — ненульові константи. Припустимо, що лінійні форми $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ незалежні. Тоді усі випадкові величини ξ_i є гауссівськими [1, 2].

Ця теорема була узагальнена на різні класи локально компактних абелевих груп. У цих дослідженнях незалежні випадкові величини набували значень у локально компактній абелевій групі X, а коефіцієнтами лінійних форм були топологічні автоморфізми X [3, гл. 4, 5], [4–7]. Зокрема, Г. М. Фельдман та П. Грачик показали в [5], що не існує навіть слабкого аналогу теореми Скитовича–Дармуа для компактних зв'язних абелевих груп. Вони довели таке: нехай X — довільна компактна зв'язна абелева группа, тоді існують топологічні автоморфізми α_i, β_i, $i = 1, 2$, групи X та незалежні випадкові величини ξ_i зі значеннями у X такі, що лінійні форми $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ та $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ незалежні, але розподіли випадкових величин ξ_i не є згортками гауссівських та ідемпотентних розподілів.

Достатньо несподіваним виявився такий факт: якщо розглядати три лінійні форми від трьох випадкових величин, то існують компактні зв'язні абелеві групи, для яких виконується слабкий аналог теореми Скитовича–Дармуа. У цій роботі ми побудуємо приклади компактних зв'язних абелевих груп, для яких із незалежності трьох лінійних форм від трьох випадкових величин випливає, що якнайменш одна випадкова величина має ідемпотентний розподіл. Такими групами є деякі $\boldsymbol{a}$-адичні соленоїди.

Далі нам будуть потрібні деякі визначення та позначення. Нехай X — локально компактна абелева група, яка задовольняє другу аксіому зліченності. Нехай $Y = X^*$ — група характерів групи X. Значення характеру $y \in Y$ на елементі $x \in X$ позначимо через (x, y). Позначимо через $\mathrm{Aut}(X)$ групу топологічних автоморфізмів X. Для кожного $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ визначимо відображення $\widetilde{\alpha}\colon Y \to Y$ за формулою $(\alpha x, y) = (x, \widetilde{\alpha} y)$ для усіх $x \in X$, $y \in Y$. Відображення $\widetilde{\alpha}$ є неперервним автоморфізмом групи Y. Тотожний автоморфізм групи позначимо через I. Нехай k — ціле. Позначимо через f_k відображення $f_k\colon X \to X$, визначене за формулою $f_k x = kx$.

Позначимо через $\mathbb{Z}$ нескінченну циклічну групу, через $\mathbb{R}$ — адитивну групу дійсних чисел, через $\mathbb{T}$ — групу обертань кола, через $\mathbb{Q}$ — адитивну групу раціональних чисел у дискретній топології, через $\Delta_{\boldsymbol{a}}$ — групу $\boldsymbol{a}$-адичних чисел. Нехай $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ — фіксована, але довільна нескінченна послідовність натуральних чисел, де усі $a_i > 1$. Розглянемо групу $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$. Нагадаємо визначення $\boldsymbol{a}$-адичного соленоїда. Нехай B — підгрупа групи $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$ виду $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, де $\boldsymbol{u} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Фактор-група $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}} = (\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}})/B$ називається $\boldsymbol{a}$-адичним соленоїдом. Група $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}}$ є компактною зв'язною абелевою групою розмірності 1. Група характерів групи $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}}$ топологічно ізоморфна підгрупі $H_{\boldsymbol{a}} = \left\{\dfrac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \ldots;\ m \in \mathbb{Z}\right\}$ групи $\mathbb{Q}$ [8, (24.28)].

Позначимо через $M^1(X)$ множину всіх імовірнісних розподілів на групі X, через E_x — вироджений розподіл, сконцентрований у точці $x \in X$. Нехай K — компактна підгрупа X. Позначимо через m_K розподіл Хаара на K, через $I(X)$ — множину зсувів таких розподілів, тобто розподілів виду $m_K * E_x$, де K — компактна підгрупа X, $x \in X$. Розподіли класу $I(X)$ називаються ідемпотентними. Характеристичну функцію розподілу $\mu \in M^1(X)$ визначимо за формулою

$$\widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y)\, d\mu(y), \qquad y \in Y.$$

Зазначимо, що характеристична функція розподілу m_K має вигляд

$$\widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y \in H, \\ 0, & y \notin H, \end{cases} \tag{1}$$

де $H = \{y \in Y\colon (x, y) = 1,\ x \in K\}$.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $X = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}}$ та для будь-якого простого числа p виконується співвідношення $f_p \notin \mathrm{Aut}(X)$. Нехай ξ_i, $i = 1, 2, 3$, — незалежні випадкові величини зі значеннями в X і з розподілами μ_i. Тоді з незалежності лінійних форм $L_j = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\xi_i$, де $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, 3$, випливає, що якнайменш один розподіл $\mu_i = m_X$.*

Прикладом групи, яка задовольняє умови теореми 1, є $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, де $\boldsymbol{a} = (2, 3, 5, \ldots)$. Група характерів групи X топологічно ізоморфна підгрупі групи $\mathbb{Q}$, яка має вигляд

$$H_{\boldsymbol{a}} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n = p_1 p_2 \cdots p_l,\ p_l - \text{різні прості числа},\ l = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Доведення теореми 1 спирається на такі леми.

Лема 1. *Нехай X — локально компактна абелева група, яка задовольняє другу аксіому зліченності, ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — незалежні випадкові величини зі значеннями в X та з розподілами μ_i. Розглянемо лінійні форми $L_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$, де $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$. Лінійні форми L_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, незалежні тоді і тільки тоді, коли характеристичні функції $\widehat{\mu}_i(y)$ задовольняють рівняння*

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{\mu}_i(\widetilde{\alpha}_{i1}u_1 + \widetilde{\alpha}_{i2}u_2 + \cdots + \widetilde{\alpha}_{in}u_n) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_i(\widetilde{\alpha}_{ij}u_j), \tag{2}$$

де $u_j \in Y$, $\widetilde{\alpha}_{ij} \in \mathrm{Aut}(Y)$.

Нижченаведена лема стверджує, що виконується аналог теореми Скитовича–Дармуа для скінченних абелевих груп, тобто із незалежності n лінійних форм від n незалежних випадкових величин випливає, що всі випадкові величини мають ідемпотентні розподіли.

Лема 2 [9]. *Нехай X — скінченна абелева група. Нехай ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — незалежні випадкові величини зі значеннями в X та з розподілами μ_i. Розглянемо лінійні форми $L_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$, де $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Із незалежності лінійних форм L_j випливає, що $\mu_i = E_{x_i} * m_K$, де K є підгрупою X, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Із лем 1 та 2 ми отримуємо

Наслідок 1. *Нехай Y — скінченна абелева група. Нехай $\widehat{\mu}_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, — характеристичні функції на Y, які задовольняють рівняння (2), де $\widetilde{\alpha}_{1j} = \widetilde{\alpha}_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді $\widehat{\mu}_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, є характеристичними функціями ідемпотентних розподілів.*

Подана нижче лема є аналогом теореми Скитовича–Дармуа для трьох лінійних форм від трьох випадкових величин для групи обертань кола $X = \mathbb{T}$.

Лема 3 [10]. *Нехай $X = \mathbb{T}$, $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, 3$. Нехай ξ_i, $i = 1, 2, 3$, — незалежні випадкові величини зі значеннями в X та з розподілами μ_i такими, що їх характеристичні функції не обертаються на нуль. Припустимо, що $L_j = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\xi_i = 1, 2, 3$ є незалежними. Тоді μ_i — вироджені розподіли.*

Робота виконана в рамках наукових досліджень за темою "Українська філія французько-російської лабораторії ім. Ж.-В. Понселе. Імовірнісні задачі на групах і в спектральній теорії".

1. *Скитович В. П.* Об одном свойстве нормального распределения // Докл. АН СССР. – 1953. – **89**, No 2. – С. 217–219.
2. *Darmois G.* Analyse generale des liasions stochastiques. Etude particuliere de l'analyse factorielle lineaire // Rev. Inst. Intern. Stat. – 1953. – **21**. – P. 2–8.
3. *Фельдман Г. М.* Характеризационные задачи математической статистики на локально компактных абелевых группах. – Киев: Наук. думка, 2010. – 434 с.
4. *Фельдман Г. М.* К теореме Скитовича–Дармуа на абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1992. – **37**, вып. 4. – С. 695–708.
5. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich–Darmois theorem on compact Abelian groups // J. Theoret. Probab. – 2000. – **13**. – P. 859–869.
6. *Фельдман Г. М., Грачик П.* К теореме Скитовича–Дармуа на дискретных абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – **49**. – С. 596–601.
7. *Feldman G. M., Graczyk P.* The Skitovich–Darmois theorem for locally compact Abelian groups // J. Austral. Math. Soc. – 2010. – **88**. – P. 339–352.

8. *Hewitt E., Ross A.* Abstract harmonic analysis. Vol. 1. – Berlin: Springer, 1963. – 540 p.
9. *Мазур И. П.* Теорема Скитовича–Дармуа для конечных абелевых групп (случай n линейных форм от n независимых случайных величин) // Укр. мат. журн. – 2011. – **4**. – С. 1512–1523.
10. *Feldman G. M., Myronyuk M. V.* Independent linear statistics on the cylinders // arXiv:1212.2772, 2012.

Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Веркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 25.12.2012

И. П. Мазур

К теореме Скитовича–Дармуа на $\boldsymbol{a}$-аддических соленоидах

Пусть X — компактная связная абелева группа. Известно, что существуют топологические автоморфизмы α_j, β_j группы X и независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в X и распределениями μ_1, μ_2 такими, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ независимы, но μ_1 и μ_2 не являются свертками гауссовских и идемпотентных распределений. Доказано, что существуют компактные связные абелевы группы X, обладающие следующим свойством: из независимости трех линейных форм от трех независимых случайных величин со значениями в X вытекает, что по крайней мере одно распределение является идемпотентным. Такими группами являются некоторые $\boldsymbol{a}$-аддические соленоиды.

I. P. Mazur

On the Skitovich–Darmois theorem for $\boldsymbol{a}$-adic solenoids

Let X be a compact connected Abelian group. It is known that then there exist topological automorphisms α_j, β_j of X and independent random variables ξ_1 and ξ_2 with values in X and distributions μ_1, μ_2 such that the linear forms $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ and $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ are independent, but μ_1 and μ_2 are not represented as convolutions of Gaussian and idempotent distributions. We prove that there exist compact connected Abelian groups X having the following property: the independence of three linear forms of three independent random variables with values in X implies that at least one of the distributions is idempotent. These groups are some $\boldsymbol{a}$-adic solenoids.