УДК 517.547.22

К. Г. Малютин, И. И. Козлова

Канонические функции допустимых мер в полуплоскости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Введено понятие канонической функции меры в верхней полуплоскости. Доказано, что каноническая функция гамма-эпсилон допустимой меры принадлежит классу истинно субгармонических функций конечного гамма-эпсилон типа, ее полная мера совпадает с заданной мерой и ее коэффициенты Фурье — с коэффициентами Фурье этой меры. Кроме того, также доказано, что каноническая функция является единственной функцией из этого класса, которая обладает такими свойствами.

Многие важные результаты в теории субгармонических функций получаются с использованием формул представления этих функций. Наиболее известная из них формула Пуассона–Йенсена, которая дает представление субгармонической функции в круге. Отметим также формулы Неванлинны, Симидзу–Альфорса, Карлемана, Левина. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным [1], в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Аналогичные формулы при различных ограничениях получали другие исследователи [2–4].

В теории субгармонических функций часто возникает обратная задача: по заданной мере построить субгармоническую функцию, мера которой в точности совпадает с заданной мерой. Классические формулы Вейерштрасса, Адамара дают представление целых функций конечного порядка, нули которых совпадают с заданной последовательностью. Эти формулы были обобщены в работах Л. А. Рубела [5], Б. Н. Хаббибулина [6, 7], К. Г. Малютина и В. А. Герасименко [8], К. Г. Малютина и Н. М. Садыка [9] и др. Цель настоящей работы — получить аналогичные формулы для мер конечного (γ, ε)-типа, распределенных в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Основным инструментом исследований является метод рядов Фурье, развитый Л. А. Рубелом и Б. А. Тейлором для мероморфных функций и распространенный К. Г. Малютиным на дельта-субгармонические функции в полуплоскости [10]. Мы вводим понятие канонической функции меры конечного (γ, ε)-типа, распределенной в верхней полуплоскости, которая в случае дискретной меры совпадает с определением канонического произведения Неванлинны, построенного по нулям функции, аналитической в верхней полуплоскости [2].

Определение 1. Положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, называется функцией роста.

Далее через $\gamma(r)$ обозначаем некоторую (как правило, фиксированную) функцию роста, удовлетворяющую условию $\liminf\limits_{r\to\infty} \gamma(r)/r > 0$. Будем пользоваться терминологией работ [1, 10]. Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость комплексного переменного z; Через $C(a, r)$ — открытый круг радиуса r с центром в точке a; через Ω_+ — пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+\colon \Omega_+ = \Omega \bigcap \mathbb{C}_+$; $\overline{G}$ — замыкание множества G. Если $0 < r_1 < r_2$, то $D_+(r_1, r_2) = \overline{C_+(0, r_2) \setminus C_+(0, r_1)}$ означает замкнутое полукольцо.

Обозначим через SK класс субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, имеющих положительную гармоническую мажоранту в любой ограниченной области в $\mathbb{C}_+$. Функции $v(z)$ класса SK обладают следующими свойствами [1]:

а) $v(z)$ имеет некасательный предел $v(t)$ почти всюду на вещественной оси, $v(t) \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(-\infty, \infty)$;

б) на вещественной прямой существует знакопеременная мера ν такая, что

$$\lim_{y\to+0} \int\limits_a^b v(t+iy)\,dt = \nu([a,b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}).$$

Мера ν называется граничной мерой функции v;

в) $d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t)$, где σ — сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v \in SK$ определим, следуя [1], полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int\limits_{\mathbb{C}_+\cap K} \operatorname{Im}\zeta\, d\mu(\zeta) - \nu(K),$$

где μ — риссовская мера функции v. Мера λ обладает следующими свойствами: 1) λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$; 2) λ — положительная мера вне $\mathbb{R}$; 3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$. Совокупность условий 1–3 обозначим через $\{G\}$, если, кроме того, 4) мера λ неотрицательная и на $\mathbb{R}$, то — через $\{\mathrm{G}^+\}$.

Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется истинно субгармонической, если $\limsup\limits_{z\to t} v(z) \leqslant 0$ для любого вещественного числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций обозначим через JS. Полная мера функций класса JS обладает свойствами $\{\mathrm{G}^+\}$. Класс истинно дельта-субгармонических функций $J\delta$ определяется как разность $J\delta = JS - JS$.

Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ — полная мера v, а $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение λ. Положим

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^\pi v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi, \qquad N(r,v) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}dt,$$

$$T(r,v) := m(r,v) + N(r,v) + m(r_0,-v),$$

где r_0 — произвольное положительное число и $r > r_0$; можно взять $r_0 = 1$.

Справедливо равенство [1]

$$T(r,v) = T(r,-v). \tag{1}$$

Пусть $\varepsilon(r)$ — невозрастающая функция на $[0;+\infty)$ такая, что $\varepsilon(0) = 1$, и для некоторого $\eta > 1$ неравенство $\varepsilon(r + r\varepsilon(r)) \geqslant (\varepsilon(r))^\eta$ верно для всех больших r. Обозначим класс таких функций через $\mathcal{E}$.

Следуя Хабибуллину, введем определение.

Определение 2. Пусть γ — функция роста, $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Функция $v \in J\delta$, $0 \notin \operatorname{supp}\lambda_v$, $v(0) = 0$, называется функцией конечного (γ,ε)-типа, если существуют постоянные α, A и $B > 0$ такие, что

$$T(r,v) \leqslant \frac{A}{r(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r + B\varepsilon(r)r).$$

Обозначим через $J\delta((\gamma,\varepsilon))$ класс функций конечного (γ,ε)-типа, через $JS((\gamma,\varepsilon))$ — класс истинно субгармонических функций конечного (γ,ε)-типа. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Класс $J\delta((\gamma,\varepsilon))$ представляет собой вещественное векторное пространство, а $JS((\gamma,\varepsilon))$ — конус.*

Это следует из (1) и неравенства $T\big(r,\sum v_j\big)\leqslant\sum T(r,v_j)$.

Основным результатом нашей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть мера λ удовлетворяет условиям* $\{G^+\}$, (2), (3). *Тогда ее каноническая функция $v(z)$ принадлежит классу $JS(\gamma,\varepsilon)$, ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами Фурье меры λ, а ее полная мера совпадает с мерой λ. Причем $v(z)$ — единственная функция, обладающая этими свойствами.*

Положительная мера λ имеет *конечную (γ,ε)-плотность*, если существуют положительные постоянные α, A и B такие, что

$$N(r,\lambda):=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\lambda(t)}{t^3}dt\leqslant\frac{A}{r(\varepsilon(r))^{\alpha}}\gamma(r+B\varepsilon(r)r). \tag{2}$$

Пусть λ — мера, удовлетворяющая условиям $\{G^+\}$. Обозначим

$$S_+(r;k,\lambda)=\frac{1}{\pi k}\iint\limits_{D_+(r_0,r)}\frac{\sin k\varphi}{\tau^k\operatorname{Im}\zeta}d\lambda(\zeta)+\frac{1}{\pi k r_0^{2k}}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r_0)}}\frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k d\lambda(\zeta),$$

где $\zeta=\tau e^{i\varphi}$, $r_0>0$ — фиксированное число, $k\in\mathbb{N}$,

$$S_+(r_1,r_2;k,\lambda)=S_+(r_2;k,\lambda)-S_+(r_1;k,\lambda),\qquad r_1\leqslant r_2,$$

$$S'_+(r;k,\lambda)=\frac{1}{\pi k r^k}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r)}}\frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k d\lambda(\zeta),$$

при этом символ λ, если это не вызывает недоразумений, будем опускать.

Мера λ называется (γ,ε)-*сбалансированной*, если существуют положительные постоянные A, B, при которых

$$|S_+(r_1,r_2;k,\lambda)|\leqslant\frac{A\gamma(r_1+B\varepsilon(r_1)r_1)}{r_1^k(\varepsilon(r_1))^{\alpha}}+\frac{A\gamma(r_2+B\varepsilon(r_2)r_2)}{r_2^k(\varepsilon(r_2))^{\alpha}}, \tag{3}$$

для всех $r_2>r_1>0$ и $k=2,3,\ldots$.

Мера λ называется (γ,ε)-*допустимой*, если она (γ,ε)-сбалансированна и имеет конечную (γ,ε)-плотность.

Мера λ называется (γ,ε)-*взвешенной*, если существуют последовательность вещественных чисел $\alpha=\{\alpha_k\}$ и положительные постоянные A, B, при которых для всех $r>0$, $k\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|\alpha_k+S_+(r;k,\lambda)|\leqslant\frac{A\gamma(r+B\varepsilon(r)r)}{r^k(\varepsilon(r))^{\alpha}}. \tag{4}$$

В работе [10] было введено следующее определение. Пусть $\alpha=\{\alpha_k\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел. Функции

$$c_k(r;\lambda,\alpha)=r^k(\alpha_k+S_+(r;k))-S'_+(r;k),\qquad k\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

называются *коэффициентами Фурье пары* (λ,α).

Пара (λ, α) называется (γ, ε)-*допустимой*, если мера λ имеет конечную γ-плотность и существуют положительные постоянные A, B, при которых

$$|c_k(r; \lambda, \alpha)| \leqslant \frac{A\gamma(r + B\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^\alpha}, \qquad r > 0, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В определении (5) коэффициенты Фурье зависят от выбора последовательности α. Мы введем понятие коэффициентов Фурье меры, которое не зависит от выбора последовательности чисел α, а зависит только от самой меры.

Пусть мера λ имеет конечную (γ, ε)-плотность, а γ — функция роста. Положим $p[\gamma] = \infty$, если для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется условие $\liminf\limits_{r\to\infty} \gamma(r)r^{-p} > 0$, и $p[\gamma] = \min\{p \colon p \in \mathbb{N},\ \liminf\limits_{r\to\infty} \gamma(r)r^{-p} = 0\}$ в противном случае.

Для $1 \leqslant k < p[\gamma]$ обозначим $r'_k = \inf r_k$, где нижняя грань берется по всем r_k, для которых неравенство

$$\frac{A\gamma(r_k + B\varepsilon(r_k)r_k)}{r_k^k(\varepsilon(r_k))^\alpha} \leqslant 2\frac{A\gamma(r + B\varepsilon(r)r)}{r^k(\varepsilon(r))^\alpha}$$

выполняется для всех $r > 0$, а число B удовлетворяет неравенствам (3) и (4). Для таких k определим

$$\alpha_k = -S_+(r'_k; k). \tag{7}$$

Если $p[\gamma] < \infty$, то по определению $p[\gamma]$ существует последовательность $\{r_j\}$, $r_j \uparrow \infty$ при $j \to \infty$, такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\gamma(r_j + B\varepsilon(r_j)r_j)}{(\varepsilon(r_j))^\alpha} r_j^{-p[\gamma]} = 0. \tag{8}$$

Тогда для $k \geqslant p[\gamma]$ положим

$$\alpha_k = -\lim_{j\to\infty} S(r_j; k). \tag{9}$$

Определение 3. Пусть в определении (5) в качестве последовательности α взяты числа, определяемые формулой (7), с заменой r_k на r'_k, и формулой (9). Тогда коэффициенты Фурье пары (λ, α) называются коэффициентами Фурье меры λ (соответствующими функции роста $\gamma(r)$ и функции $\varepsilon(r)$).

Покажем корректность этого определения в случае, когда мера λ (γ, ε)-допустима. По предположению имеем

$$|S_+(r_m, r_j; k)| \leqslant \frac{A\gamma(r_m + B\varepsilon(r_m)r_m)}{r_m^k(\varepsilon(r_m))^\alpha} + \frac{A\gamma(r_j + B\varepsilon(r_j)r_j)}{r_j^k(\varepsilon(r_j))^\alpha}.$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{S_+(r_j; k)\}$ для $k \geqslant p[\gamma]$. Докажем, что предел в (9) не зависит от выбора последовательности $\{r_j\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющей условию (8). Действительно, пусть $\{r_j^1\}_{j=1}^\infty$ и $\{r_j^2\}_{j=1}^\infty$ — две такие последовательности, а α_k^1 и α_k^2 — соответствующие им пределы в (9). При заданном $\varepsilon > 0$ выберем номер j_0 так, чтобы при $j \geqslant j_0$ выполнялись неравенства

$$|\alpha_k^1 + S(r_j^1; k)| \leqslant \varepsilon, \qquad |\alpha_k^2 + S(r_j^2; k)| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$|\alpha_k^1-\alpha_k^2|\leqslant|\alpha_k^1+S(r_j^1;k)|+|\alpha_k^2+S(r_j^2;k)|\leqslant 2\varepsilon+|S(r_j^1,r_j^2;k)|\leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon+\frac{A\gamma(r_j^1+B\varepsilon(r_j^1)r_j^1)}{{r_j^1}^k(\varepsilon(r_j^1))^\alpha}+\frac{A\gamma(r_j^2+B\varepsilon(r_j^2)r_j^2)}{{r_j^2}^k(\varepsilon(r_j^2))^\alpha}.$$

И эта разность может быть сделана как угодно малой в силу условия (8).

Определение 4. Коэффициенты Фурье меры λ называются (γ,ε)-допустимыми, если они удовлетворяют неравенству (6).

Лемма 2. *Коэффициенты Фурье $c_n(r,\lambda)$, $n\in\mathbb{N}$, меры λ являются (γ,ε)-допустимыми тогда и только тогда, когда мера λ является (γ,ε)-допустимой.*

Введем теперь понятие канонической функции (γ,ε)-допустимой меры λ. Пусть $c_k(r)=$ $=c_k(r;\lambda)$ — коэффициенты Фурье меры λ. Положим

$$\Phi(\rho e^{i\varphi})=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\rho)\sin k\varphi,\qquad P_\rho(z)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_+(0,\rho)}K(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta),$$

$$a_\rho(z)=\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\partial G(z,\rho e^{i\varphi})}{\partial n}\Phi(\rho e^{i\varphi})\,d\varphi,\qquad v_\rho(z)=a_\rho(z)+P_\rho(z),$$

где G — функция Грина полукруга $C_+(0,\rho)$.

Положим теперь $v(z)=v_\rho(z)$ при $|z|<\rho$.

Определение 5. Функция $v(z)$ называется канонической функцией меры λ.

Работа выполнена в рамках научно-исследовательской темы № 0111U002152.

1. *Гришин А. Ф.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1994. – **1**, № 2. – С. 193–215.
2. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – Москва: Наука, 1986. – 240 с.
3. *Hayman W. K.* Questions of regularity connected with Phragmen–Lindelöf principle // J. Math. pure et appl. – 1956. – **35**. – P. 115–126.
4. *Ito J.-I.* Subharmonic functions in the half-plane // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **129**, No 3. – P. 479–499.
5. *Rubel L. A.* A generalised canonical product // Современные проблемы теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1966. – С. 264–270.
6. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 2. – С. 121–160.
7. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голомофных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты. II. Целые функции // Там же. – 2009. – **200**, № 2. – С. 129–158.
8. *Малютин К. Г., Герасименко В. А.* Обобщенные канонические произведения в комплексной плоскости // Вестн. Харьков. ун-та. Математика, прикл. математика и механика. – 2007. – **57**, № 790. – С. 198–205.
9. *Малютин К. Г., Садык Н. М.* Представление субгармонических функций в полуплоскости // Мат. сб. – 2007. – **198**, № 12. – С. 47–62.
10. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и дельта-субгармонические функции конечного гамма-типа в полуплоскости // Там же. – 2001. – **192**, № 6. – С. 51–70.

Сумской государственный университет *Поступило в редакцию 03.01.2013*

К. Г. Малютін, І. І. Козлова

Канонічні функції допустимих мір у півплощині

Введено поняття канонічної функції міри у верхній півплощині. Доведено, що канонічна функція гамма-епсилон допустимої міри належить класу істинно субгармонічних функцій скінченного гамма-епсилон типу, її повна міра збігається із заданою мірою і її коефіцієнти Фур'є — з коефіцієнтами Фур'є цієї міри. Крім того, також доведено, що канонічна функція є единою функцією з цього класу, яка має такі властивості.

K. G. Malyutin, I. I. Kozlova

Canonical functions of possible measures in the half-plane

The concept of a canonical function of measure in the half-plane is entered. It is proven that the canonical function of a gamma-epsilon possible measure belongs to the class of proper subharmonic functions of the finite gamma-epsilon type, its full measure coincides with the given measures, and its Fourier coefficients coincide with those of this measure. It is also proven that the canonical function is the unique function from this class, which has these properties.