УДК 512.544

М. М. Семко (мол.)

Групи, що мають велику систему пронормальних і транзитивно нормальних підгруп

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Підгрупа H групи G називається транзитивно нормальною в G, якщо H є нормальною в кожній підгрупі $K \geqslant H$, у якій H є субнормальною. Досліджено радикальні групи, в яких нескінченно породжені підгрупи транзитивно нормальні.

Підгрупа H групи G є *пронормальною в* G, якщо для кожного елемента $g \in G$ існує такий елемент $u \in \langle H, H^g \rangle$, що $H^g = H^u$. Пронормальні підгрупи виникли в процесі вивчення таких важливих типів підгруп у скінченних (розв'язних) групах, як силовські та холлівські підгрупи, системні нормалізатори та підгрупи Картера. Сам термін "пронормальна підгрупа" належить Ф. Холлу. Пронормальні підгрупи мають таку важливу властивість. Нехай G — довільна група та K — її пронормальна підгрупа. Якщо L — така підгрупа G, що $K \leqslant L$ і K є субнормальною в L, то K буде нормальною підгрупою в L. Цю важливу властивість мають не одні пронормальні підгрупи, її мають також деякі їх узагальнення.

Не так давно у роботі [1] було введено поняття транзитивно нормальної підгрупи. Підгрупа H групи G називається *транзитивно нормальною в* G, якщо H є нормальною в кожній підгрупі $K \geqslant H$, у якій H є субнормальною. Як ми вже бачили, кожна пронормальна підгрупа буде транзитивно нормальною, але не навпаки. Дійсно, кожна самонормалізовна підгрупа H (тобто підгрупа, що збігається зі своїм нормалізатором), очевидно, буде транзитивно нормальною. З іншого боку, підгрупа, яка є пронормальною та самонормалізовною одночасно, є абнормальною (див., наприклад, [2, § 6, теорема 7]). Нагадаємо, що підгрупа A групи G називається *абнормальною в* G, якщо $x \in \langle A, A^x \rangle$ для кожного елемента $x \in G$. У цьому зв'язку слід відзначити, що кожна підгрупа, яка містить у собі абнормальну підгрупу, є самонормалізовною (див., наприклад, [2, § 6, теорема 1]), однак не кожна самонормалізовна підгрупа має таку властивість.

Властивість транзитивної нормальності пов'язана з іншою важливою властивістю. Група G називається *T-групою*, якщо кожна її субнормальна підгрупа є нормальною. Інакше кажучи, G є T-групою, якщо в G властивість "бути нормальною підгрупою" є транзитивною. Тривіальний приклад T-груп дають *дедекіндові групи*, тобто групи, кожна підгрупа яких є нормальною. Р. Бер [3] довів, що довільна дедекіндова група G або абелева, або $G = Q \times D \times B$, де Q — група кватерніонів, D — елементарна абелева 2-підгрупа та B — періодична абелева група з властивістю $2 \notin \Pi(B)$. Структура скінченних розв'язних T-груп була вивчена В. Гашюцем [4]. Відзначимо, що не кожна підгрупа T-групи сама буде T-групою, так що приходимо до такого типу груп. Група G називається *$\bar{T}$-групою*, якщо кожна її підгрупа є T-групою. Зокрема, ми бачимо, що G є T-групою тоді і тільки тоді, коли кожна підгрупа G є транзитивно нормальною в G. В. Гашюц довів, що кожна скінченна розв'язна T-група буде $\bar{T}$-групою, але для нескінченних груп це вже не так. Нескінченні розв'язні T-групи та $\bar{T}$-групи вивчались Д. Робінсоном [5]. Зазначимо, що $\bar{T}$-групи мають багато пронормальних підгруп. Так, кожна скінченно породжена підгрупа $\bar{T}$-групи є пронормальною. Т. А. Пенг довів [6], що скінченна група G буде $\bar{T}$-групою тоді і тільки тоді, коли кожна її циклічна підгрупа буде пронормальною. Цей результат був розширений на нескінченні групи М. Ф. Кузенним та І. Я. Субботіним [7]. Зокрема, з їх результатів можна отримати таку характеризацію локально розв'язних $\bar{T}$-груп: *локально розв'язна група G тоді і тільки тоді є $\bar{T}$-групою, коли кожна її скінченно породжена підгрупа є пронормальною.* У цьому зв'язку природно розглянути протилежну ситуацію, тобто групи, у яких кожна підгрупа, що не має скінченної породжуючої множини (нескінченно породжена підгрупа), буде пронормальною.

У цій роботі розглядається більш загальна ситуація, точніше, групи, у яких кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною. Звичайно, таке вивчення можливе лише при наявності деяких природних обмежень. На це вказують приклади груп, отримані О. Ю. Ольшанським (див. [8]). Ми використовуємо тут таке природне обмеження. Нагадаємо, що група G називається *радикальною*, якщо вона має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого локально нільпотентні. Стандартні властивості радикальних груп можна знайти у статті [9].

Зазначимо, що кожна періодична радикальна група буде локально розв'язною. Перший результат дає опис періодичних локально розв'язних груп, у яких кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною.

Теорема 1. *Нехай G — локально розв'язна періодична група, у якій кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною. Якщо G — не черніковсъка група, то вона буде $\bar{T}$-групою. Якщо G — черніковсъка група, то або G буде дедекіндовою, або подільна частина Y групи G буде квазіциклічною підгрупою, а G/Y буде скінченною $\bar{T}$-групою.*

Другий результат належить до будови локально нільпотентних груп, в яких кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною.

Теорема 2. *Нехай G — локально нільпотентна група, у якій кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною. Тоді кожна нескінченно породжена підгрупа G є нормальною.*

Групи, у яких кожна нескінченно породжена підгрупа є нормальною, вивчали Л. А. Курдаченко, В. В. Пилаєв [10], Дж. Кутоло [11], Дж. Кутоло та Л. А. Курдаченко [12]. Зокрема, в цих роботах отримано досить детальний опис локально розв'язних груп, що мають вказану властивість.

Опис неперіодичних радикальних груп, у яких кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною, розпадається на дві частини залежно від властивостей їх локально нільпотентного радикала. Перший випадок, який тут природно виділяється, це випадок, коли локально нільпотентний радикал не є мінімаксною підгрупою.

Нагадаємо, що група G називається мінімаксною, якщо вона має скінченний субнормальний ряд

$$\langle 1 \rangle = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_k = G,$$

фактори якого задовольняють умову мінімальності або максимальності для всіх підгруп. Якщо G — радикальна мінімаксна група, то G має скінченний субнормальний ряд, фактори якого або майже поліциклічні, або черніковські групи.

Теорема 3. *Нехай G — радикальна група, в якій кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною. Якщо G не є періодичною, а її локально нільпотентний радикал не є мінімаксною підгрупою, то G є абелевою.*

Якщо G — група, то через $\mathrm{Tor}(G)$ позначатимемо її максимальну нормальну періодичну підгрупу. Нагадаємо, що у випадку, коли група G є локально нільпотентною, то $\mathrm{Tor}(G)$ містить усі її елементи скінченного порядку, так що фактор-група $G/\mathrm{Tor}(G)$ є вільною від скруту. У цьому випадку $\mathrm{Tor}(G)$ називається періодичною частиною групи G.

Випадок, коли локально нільпотентний радикал є мінімаксною підгрупою, також розпадається на дві частини залежно від того, чи є його періодична частина нескінченною або скінченною.

Теорема 4. *Нехай G — неперіодична радикальна група, в якій кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною. Припустимо, що її локально нільпотентний радикал L є мінімаксною підгрупою, у якої періодична частина $\mathrm{Tor}(L)$ нескінченна. Тоді або G — мінімаксна гіперцентральна група, у якій кожна нескінченно породжена підгрупа є нормальною, або G задовольняє такі умови:*

(i) L містить у собі таку квазіциклічну q-підгрупу Q, що G/Q — абелева та скінченно породжена;

(ii) G/L — скінченна циклічна група і її порядок ділить $q-1$;

(iii) кожна нескінченно породжена підгрупа L буде G-інваріантною;

(iv) якщо $G \neq L$, то $G = QA$ для деякої підгрупи A, причому перетин $Q \bigcap A$ є скінченним.

Нехай G — група та A — її нормальна абелева підгрупа, вільна від скруту. Будемо говорити, що A є *раціонально незвідною* в G, якщо A/B є періодичною для будь-якої своєї неодиничної G-інваріантної підгрупи B. Будемо говорити, що A є *майже незвідною* в G, якщо A/B є скінченною для будь-якої своєї неодиничної G-інваріантної підгрупи B.

Теорема 5. *Нехай G — неперіодична радикальна група, у якій кожна нескінченно породжена підгрупа є транзитивно нормальною. Припустимо, що її локально нільпотентний радикал L є нескінченно породженою мінімаксною підгрупою, у якої періодична частина $\mathrm{Tor}(L) = T$ скінченна. Тоді G є групою одного з таких типів:*

(i) G — група, у якій кожна нескінченно породжена підгрупа є нормальною.

(ii) G містить у собі таку нормальну абелеву підгрупу D без скруту, що D є майже незвідною в G, а G/D — скінченно породженою та майже нільпотентною.

(iii) L містить у собі G-інваріантну підгрупу A, що задовольняє такі умови:

A — нескінченно породжена, вільна від скруту та раціонально незвідна в G;

кожна власна сервантна підгрупа A є скінченно породженою;

кожна підгрупа A є G-інваріантною, зокрема $|G : C_G(A)| \leqslant 2$;

G/A — скінченна $\bar{T}$-група.

1. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Transitivity of normality and pronormal subgroups // Combinatorial group theory, discrete groups, and number theory: AMS Special session on infinite groups. 8–9 Oct. 2005, Bard College. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. – P. 201–212.
2. *Ба М. С., Боревич З. И.* О расположении промежуточных подгрупп // Кольца и линейные группы. – Краснодар: Изд. Кубан. ун-та, 1988. – С. 14–41.
3. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – **2**. – P. 12–17.
4. *Gaschütz W.* Gruppen in denen das Normalreilersein transitiv ist // J. Reine Angew. Math. – 1957. – **198**. – P. 87–92.
5. *Robinson D. J. S.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1964. – **60**. – P. 21–38.
6. *Peng T. A.* Finite groups with pronormal subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **20**. – P. 232–234.
7. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1987. – № 11. – С. 77–79.

8. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – Москва: Наука, 1989. – 447 с.
9. *Плоткин Б. И.* Радикальные группы // Мат. сб. – 1955. – **37**. – С. 507–526.
10. *Курдаченко Л. А., Пилаев В. В.* Про групи, що є дуальними до дедекіндових // Доп. АН УРСР. – 1989. – № 10. – С. 21–22.
11. *Cutolo G.* On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups // Riv. Mat. pura et appl. – 1991. – **91**. – P. 49–59.
12. *Cutolo G., Kurdachenko L. A.* Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups // Geom. Dedic. – 1995. – **55**. – P. 279–292.

Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 21.01.2013

Н. Н. Семко (мл.)

Группы, имеющие большую систему пронормальных и транзитивно нормальных подгрупп

Подгруппа H группы G называется транзитивно нормальной в G, если H является нормальной в каждой подгруппе $K \geqslant H$, в которой H является субнормальной. Исследованы радикальные группы, в которых бесконечно порожденные подгруппы транзитивно нормальны.

M. M. Semko (jr.)

Groups that have a big family of pronormal and transitively normal subgroups

The subgroup H of a group G is said to be transitively normal in G, if H is normal in every subgroup $K \geqslant H$ such that H is subnormal in K. The radical groups, whose not finitely generated subgroups are transitively normal, are studied.