УДК 519.642

С. Г. Солодкий, Г. Л. Милейко

Гіперболічний хрест і складність жорстко некоректних задач

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Досліджено проблеми економічної дискретизації жорстко некоректних задач. Запропоновано проекційну схему дискретизації, що реалізує порядкову оцінку мінімального радіуса гальоркінської інформації.

У роботі досліджуються інформаційні аспекти чисельного розв'язування жорстко некоректних задач.

Розглянемо рівняння Фредгольма I роду

$$Ax = f \tag{1}$$

з інтегральним оператором вигляду

$$Ax(t) = \int_0^1 a(t,\tau)x(\tau)\,d\tau, \qquad t \in [0;1], \tag{2}$$

що неперервно діє в $L_2 = L_2(0;1)$ й таким, що множина $\mathrm{Range}(A)$ не замкнена в L_2 та $f \in \mathrm{Range}(A)$. Нехай права частина рівняння (1) задана з похибкою $\delta > 0$, тобто замість $f(t)$ відомо її збурення $f_\delta(t) \in L_2\colon \|f - f_\delta\| \leqslant \delta$. Характерною особливістю жорстко некоректних задач є умова належності точного розв'язку рівняння (1) деякій умові джерела логарифмічного типу. У межах наших досліджень будемо наближати розв'язок x^+ з мінімальною нормою в L_2, що належить множині

$$M_p(A) := \{u\colon u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v,\ \|v\| \leqslant \rho\}. \tag{3}$$

Тут величини $p, \rho > 0$ вважатимемо відомими.

Нехай далі $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ — деякий ортонормований базис в L_2. Через P_m позначимо ортопроектор на $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ і введемо в розгляд такий клас досліджуваних операторів (2):

$$\mathcal{H}_\gamma^r = \left\{A\colon \|A\| \leqslant \gamma_0,\ \sum_{n+m=1}^{\infty} \widehat{a}_{n,m}^2(\underline{n}\cdot\underline{m})^{2r} \leqslant \gamma_1^2\right\},$$

де $\widehat{a}_{n,m} = \int_0^1\int_0^1 e_n(t)e_m(\tau)a(t,\tau)\,d\tau dt$, $\gamma_0 \leqslant e^{-1/2}$, $\gamma = (\gamma_0;\gamma_1)$, n, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\underline{n} = 1$ при $n = 0$ та $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Зауважимо, що за базис можуть бути використані, зокрема, ортонормована система функцій Хаара ($r = 1$), підпростір тригонометричних многочленів (періодичний випадок) або ортонормована система поліномів Лежандра, що розглядається на відрізку $[0;\,1]$.

Відомо, що якщо ядро $a(t,\tau)$ оператора A виду (2) має мішані частинні похідні до порядку r включно за кожною змінною і для всіх $i,j=0,1,\ldots,r$ виконується умова

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[\frac{\partial^{i+j}a(t;\tau)}{\partial t^i\partial\tau^j}\right]^2 dtd\tau<\infty,$$

то $A\in\mathcal{H}_\gamma^r$ при деякому наборі $\gamma=(\gamma_0;\gamma_1)$ і будь-якому з вище перерахованих базисів.

Надалі клас рівнянь (1) із операторами (2) з $\mathcal{H}_\gamma^r$ й розв'язками з (3) позначатимемо $(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A))$. У даній роботі обмежимося дослідженням проекційних методів розв'язування рівнянь із $(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A))$.

Як відомо, довільний лінійний неперервний оператор $A\colon L_2\to L_2$ може бути зображений за допомогою нескінченної матриці $\{(Ae_j,e_i)\}_{i,j=1}^\infty$ вигляду

$$Ag=\sum_{i,j=1}^\infty (Ae_j,e_i)(g,e_j)e_i.$$

Кожному скалярному добутку (Ae_j,e_i) поставимо у відповідність точку $(i;j)$ координатної площини й розглядатимемо цю точку як індекс скалярного добутку (Ae_j,e_i). Відповідно, під індексом скалярного добутку (g,e_j) розумітимемо натуральне число j.

Візьмемо тепер довільну обмежену область $\Omega\subset[1;\infty)\times[1;\infty)$ координатної площини й позначимо $\omega_1=\{i\colon (i;j)\in\Omega\}$. За допомогою цієї області Ω здійснюємо перехід від (1) до дискретизованого рівняння

$$A_\Omega x=P_{\omega_1}f_\delta,$$

де

$$\begin{aligned}
&A_\Omega x=\sum_{(i,j)\in\Omega}(Ae_j,e_i)(x,e_j)e_i,\\
&P_{\omega_1}f_\delta=\sum_{k\in\omega_1}(f_\delta,e_k)e_k.
\end{aligned}\tag{4}$$

Набір скалярних добутків виду

$$(Ae_j,e_i),\qquad (f_\delta,e_k),\qquad (i,j)\in\Omega,\qquad k\in\omega_1,\tag{5}$$

що використовуються при побудові (4), прийнято називати гальоркінською інформацією про (1).

Зокрема, при $\Omega=[1;n]\times[1;m]$, $\omega_1=[1,n]$ ми одержуємо стандартну гальоркінську схему дискретизації, що полягає в переході від (1) до

$$P_nAP_mx=P_nf_\delta.\tag{6}$$

Під проекційним методом розв'язування (1) розумітимемо будь-яке відображення $\mathcal{P}=$ $=\mathcal{P}(\Omega)\colon L_2\to L_2$, що зіставляє гальоркінській інформації (5) про рівняння (1) елемент $\mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta\in L_2$, який приймається за наближений розв'язок (1). Відзначимо, що від методу

$\mathcal{P}$ не вимагається ані лінійності, ані неперервності. Під похибкою методу $\mathcal{P}(\Omega)$ на класі рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A))$, як зазвичай, розумітимемо його найбільше відхилення

$$e_\delta(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)) = \sup_{A\in\mathcal{H}_\gamma^r} \sup_{x^+\in M_p(A)} \sup_{f_\delta\colon \|f-f_\delta\|\leqslant\delta} \|x^+ - \mathcal{P}(A_\Omega)f_\delta\|.$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задамо величиною

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A)) = \inf_{\Omega,\mathrm{card}(\Omega)\leqslant N} \inf_{\mathcal{P}(\Omega)} e_\delta(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega)).$$

Нагадаємо, що раніше у роботі [1] було встановлено, що похибка довільного наближеного методу на класі жорстко некоректних задач з розв'язками з (3) не може бути меншою, ніж $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$. Тому методи, що гарантують для величини $e_\delta(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A), \mathcal{P}(\Omega))$ вказаний порядок точності, називатимемо оптимальними за порядком.

Щодо історії дослідження інформаційної складності некоректних задач, відзначимо, що вперше економічні за обсягом задіяної гальоркінської інформації (5) проекційні методи розв'язування помірно некоректних задач із точними розв'язками вигляду

$$x^+ = (A^*A)^{\nu/2}v, \qquad \|v\| \leqslant \rho, \qquad 0 < \nu < \infty, \tag{7}$$

були побудовані в роботі [2], де за схему дискретизації використовувався стандартний метод Гальоркіна (6). У цілому ж проблема складності некоректних задач довгий час залишалася відкритою. Більше того, у роботі [3] висловлювалася думка про те, що для рівнянь (1) питання про складність взагалі не може бути поставлено. Далі, у своєму огляді [4] Х. Вожьняковський, коментуючи це висловлювання, зауважує про необхідність коректної постановки подібної задачі. Тому результати роботи [5], у якій вперше були отримані порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації для рівнянь (1) з розв'язками (7) при $\nu = 2$ і операторами з $\mathcal{H}_\gamma^r$, можна вважати відповіддю на останнє зауваження. Дослідження, ініційовані в [5], були продовжені у низці робіт, серед яких назвемо [6, 7]. Як виявилося, оптимальні порядки величин, що характеризують інформаційну складність (1), реалізуються не в рамках стандартної схеми Гальоркіна (6), а деякої її модифікації, що грунтується на ідеї гіперболічного хреста (більш докладно про це див. нижче). Слід також зазначити, що дотепер інформаційна складність вивчалася лише у випадку помірно некоректних задач.

Дослідження інших типів некоректних задач (зокрема, жорстко некоректних) ще не проводилися. У зв'язку з цим можна згадати лише статтю [8], в якій розглядалося питання економічної дискретизації в рамках стандартної схеми Гальоркіна (6) для задач (1) з розв'язками, що задовольняють загальну умову джерела

$$x^+ = \varphi(A^*A)v,$$

де індексна функція φ вважалася неперервно зростаючою й такою, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\gamma_0^2) = 1$. Очевидно, що умови (3) і (7) є частинними випадками останньої. На підставі вищесказаного виникає природне запитанння: а чи є вибір гальоркінської схеми (6) найбільш економічним при побудові оптимальних за порядком проекційних методів розв'язування жорстко некоректних задач і які порядкові оцінки інформаційної складності й мінімального радіуса гальоркінської інформації на класах задач $(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A))$? Відповіді на ці та інші питання містяться у викладених нижче результатах.

Для дискретизації рівнянь з $(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A))$ замість метода Гальоркіна $P_n A P_m$ використовуватимемо його модификацію, у межах якої за область Ω береться гіперболічний хрест вигляду

$$\Gamma_{b,n} = \{1\} \times [1; 2^{bn}] \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}; 2^k] \times [1; 2^{bn-k}] \subset [1; 2^n] \times [1; 2^{bn}],$$

$$b > 1 + \frac{2}{n-1}, \qquad br \geqslant 1, \qquad n \geqslant 4.$$

Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^n = g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* P_{2^n} f_\delta, \tag{8}$$

де

$$A_n = P_1 A P_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-k}}, \tag{9}$$

а твірна функція g_α при деяких сталих $\varkappa_*$, $\varkappa > 0$ і будь-яких $\mu > 0$ задовольняє умови

$$\sup_{0<\lambda\leqslant\gamma_0^2} \sqrt{\lambda}|g_\alpha(\lambda)| \leqslant \frac{\varkappa_*}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \sup_{0<\lambda\leqslant\gamma_0^2} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \ln^{-\mu} \lambda^{-1} \leqslant \varkappa \ln^{-\mu} \frac{1}{\alpha}. \tag{10}$$

Відзначимо, що більшість відомих регуляризаторів (у тому числі й стандартний метод Тіхонова) задовольняють (10).

Проекційний метод (8)–(10) позначимо через $\mathcal{P}_g'(\Gamma_{b,n}) = \mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$.

Далі сформулюємо такі допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$. Тоді має місце оцінка*

$$\|A^* A - A_n^* A_n\| \leqslant \gamma_1^2 [2(1 + C_0) + 1] 2^{-\underline{b} rn},$$

де A_n визначається співвідношенням (9), $\underline{b} = \min\{b, 2\}$ *й* $C_0 = 2^{2r}/(2^r - 1)$.

Покладемо

$$\beta_1 = \frac{1}{p-1}\left[\left(\frac{b}{b-1}\right)^{p-1} - 1\right], \qquad \beta_2 = \frac{1}{p-1}\left(\frac{4b}{4b-3}\right)^{p-1}, \qquad p \neq 1.$$

Лема 2. *Нехай $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$. Тоді має місце така оцінка*

$$\|(P_{2^n} A - A_n) \ln^{-p} (A^* A)^{-1} v\| \leqslant \rho C_1 \frac{2^{-brn}}{(brn)^{p-1}},$$

де A_n визначається співвідношенням (9) *і*

$$C_1 = \begin{cases} \gamma_1 (\ln 2)^{-p} \left[1 + \dfrac{\beta_1 2^{r+1}}{r}\right], & 0 < p < 1, \\ \gamma_1 (\ln 2)^{-p} \left[1 + \dfrac{2^{r+1}}{r(b-1)}\right], & p = 1, \\ \gamma_1 (\ln 2)^{-p} \left[1 + \dfrac{\beta_2 2^r}{r}\right], & p > 1. \end{cases} \tag{11}$$

Далі введемо допоміжні величини: $\overline{b} = \max\{b, 2\}$, $\beta_3 = [2(1 + C_0) + 1]\gamma_1^2$,

$$C_2 = \begin{cases} 1, & 0 < p \leqslant 1, \\ 1 + 4(5p)^p, & p > 1 \end{cases} \qquad C_3 = 1 + \frac{2p}{e},$$

$$C_4 = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln \beta_3^{\overline{b}}}, & 0 < p \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\ln \beta_3^{\overline{b}} + (p-1)[\ln\ln \beta_3^{\overline{b}} - \ln\ln 2]}, & p \geqslant 1, \end{cases} \tag{12}$$

$$C_5 = C_3^p[\rho\varkappa(1 + C_2C_4^{-p}\overline{b}^p) + \varkappa_*(1 + \rho C_1)], \qquad C_6 = \begin{cases} \dfrac{p}{r+1}, & 0 < p \leqslant 1 + r, \\ 1, & p \geqslant 1 + r. \end{cases}$$

Теорема 1. *При N таких, що*

$$N^{-r}\ln^{-p} N^{2r} \asymp \frac{\delta}{\ln^{r+1}\delta^{-1}}, \tag{13}$$

виконується

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A)) \leqslant e_\delta(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A), \mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})) \leqslant 2^{-p}C_5\ln^{-p}\delta^{-1} \leqslant \widetilde{C}_p \ln^{-p} N^{2r}, \tag{14}$$

де $\widetilde{C}_p = C_5C_6^{-p}$. При цьому $\operatorname{card}(\Gamma_{b,n}) := N = n2^{bn} \asymp \delta^{-1/r}(\ln\delta^{-1})^{(r-p+1)/r}$.

Зауваження 1. Розглянемо питання про вибір параметра b при побудові гіперболічного хреста $\Gamma_{b,n}$. З (12), (14) легко бачити, що збільшення значення b призводить (особливо при великих p) до значного зростання константи $\widetilde{C}_p$, що фігурує в оцінці точності (14). З іншого боку, вигляд константи C_1 (див. (11)) дозволяє зробити висновок про істотне зростання загальної похибки методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ у випадку, коли параметр b лежить поблизу 1. Очевидно, що вибір найменшого допустимого цілого значення $b = 2$ дає можливість значною мірою знизити вплив величини $\widetilde{C}_p$ на похибку методу.

Як уже згадувалося вище, у роботі [8] на основі стандартної гальоркінської схеми дискретизації були побудовані проекційні методи розв'язування некоректних задач. При цьому наближення пропонувалося шукати у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^{n,m} = g_\alpha(A_{n,m}^*A_{n,m})A_{n,m}^*P_nf_\delta, \tag{15}$$

де $A_{n,m} = P_nAP_m$. Тоді на класі рівнянь $(\mathcal{H}_\gamma^r, M_p(A))$ є вірною оцінка (див. [8])

$$\|x^+ - x_{\alpha,\delta}^{n,m}\| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa\rho\left[\ln^{-p}\frac{1}{\alpha} + (1 + d_1)\ln^{-p}\frac{m^{2r}}{\gamma_1^2} + d\ln^{-p}\frac{n^{2r}}{\gamma_1^2}\right] + \frac{\varkappa_*\rho}{\sqrt{\alpha}}\left[\delta + m^{-r}\gamma_1\ln^{-p}\frac{m^{2r}}{\gamma_1^2}\right]. \tag{16}$$

Аналіз (16) показує, що для збереження оптимального порядку точності $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$ на всьому класі, що досліджується, необхідно покласти

$$\sqrt{\alpha}\ln^{-p}\frac{1}{\alpha} = O(\delta), \qquad m^{-r}\ln^{-p}\frac{m^{2r}}{\gamma_1^2} = O(\delta), \qquad n = O(\delta^{-\varepsilon/r}),$$

де $\varepsilon > 0$. Тоді оцінка (16) набуде вигляду

$$\|x^+ - x^{n,m}_{\alpha,\delta}\| \leqslant C\frac{\ln^{-p}\delta^{-1}}{\varepsilon^p}. \tag{17}$$

Очевидно, що величина ε не може бути як завгодно близькою до нуля, щоб не допустити істотного зростання похибки.

Залишилося підрахувати об'єм задіяної в межах (15) гальоркінської інформації (5):

$$\mathrm{card}([1;n]\times[1;m]) = n\times m \asymp \delta^{-(1+\varepsilon)/r}\frac{\ln^{-p/r}\delta^{-1}}{2^{p/r}}. \tag{18}$$

Порівняння отриманих оцінок (17), (18) для методу з [8] з результатами теореми 1 показує, що обидва підходи гарантують оптимальний порядок точності на всьому класі досліджуваних жорстко некоректних задач, у той же час задіяна нами модифікація гальоркінського методу дає можливість значно скоротити обсяг гальоркінської інформації.

Далі буде встановлено, що використана нами схема дискретизації (9) не просто є економічною, але й дає можливість реалізувати найменші порядки величин, що характеризують інформаційну складність проекційних методів розв'язування жорстко некоректних задач.

Теорема 2. *При N таких, що*

$$N^{-r}\ln^{-p} N^{2r} \leqslant \delta, \tag{19}$$

є вірною оцінка

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}^r_\gamma, M_p(A)) \geqslant \widehat{C}_p \ln^{-p} N^{2r}, \qquad \widehat{C}_p = 2^{-p-1}.$$

Комбінуючи теореми 1 і 2, одержуємо основне твердження роботи.

Теорема 3. *При N, що задовольняють* (13), *вірно*

$$R_{N,\delta}(\mathcal{H}^r_\gamma, M_p(A)) \asymp \ln^{-p} N^{2r} \asymp \ln^{-p}\delta^{-1}.$$

Зазначений оптимальний порядок на класі $(\mathcal{H}^r_\gamma, M_p(A))$ реалізується в рамках проекційного методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$ (8)–(10).

Зауваження 2. Звернемо увагу на той факт, що згідно з теоремою 2 досягнення оптимального порядку величини $R_{N,\delta}(\mathcal{H}^r_\gamma, M_p(A))$ може бути здійснене при будь-яких N, що задовольняють (19). (Принаймні цей факт не виключено.) З іншого боку (див. теореми 1 і 3), оптимальний порядок величини $R_{N,\delta}(\mathcal{H}^r_\gamma, M_p(A))$ нами досягнуто за допомогою методу $\mathcal{P}'(\Gamma_{b,n})$, де N обирається згідно з (13), тобто величина N з (13) має додатковий логарифмічний множник у порівнянні з мінімально можливим значенням (пор. з (19)). Нагадаємо, що під інформаційною складністю задачі в рамках IBC-теорії (див. [9, 10]) прийнято розуміти найменший об'єм дискретної інформації, необхідної для розв'язування задачі з наперед заданою точністю. Таким чином, з теорем 1–3 випливає, що нами знайдений основний (степеневий) порядок інформаційної складності проекційних методів на класі жорстко некоректних задач $(\mathcal{H}^r_\gamma, M_p(A))$. У той же час питання про наявність (і ступінь) логарифмічного співмножника для інформаційної складності залишається відкритим.

1. *Tautenhahn U.* Optimality for ill-posed problems under general source condition // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1998. – **19**, No 3–4. – P. 377–398.

2. *Plato R., Vainikko G. M.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63–79.
3. *Werschulz A. G.* What is the complexity of ill-posed problems? // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1985. – **9**, No 9–10. – P. 945–967.
4. *Wozniakowski H.* Information-based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. – 1986. – **1**. – P. 319–380.
5. *Pereverzev S. V., Solodky S. G.* The minimal radius of Galerkin information for the Fredholm problems of first kind // J. Complexity. – 1996. – **12**, No 4. – P. 401–415.
6. *Солодкий С. Г.* Оптимизация проекционных методов решения линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики. и мат. физики. – 1999. – **39**, № 2. – С. 195–203.
7. *Solodky S. G.* Optimal approximation for solving linear ill-posed problems // J. Complexity. – 1999. – **15**. – P. 123–132.
8. *Mathe P., Pereverzev S. V.* Discretization strategy for ill-posed problems in variable Hilbert scales // Inverse Problems. – 2003. – **19**, No 6. – P. 1263–1277.
9. *Traub J. F., Wasilkowski G., Wozniakowski H.* Information-based complexity. – Boston: Academic Press, 1988. – 523 p.
10. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – Москва: Мир, 1983. – 382 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 26.12.2013

С. Г. Солодкий, А. Л. Милейко

Гиперболический крест и сложность жестко некорректных задач

Исследованы проблемы экономичной дискретизации жестко некорректных задач. Предложена проекционная схема дискретизации, реализующая порядковую оценку минимального радиуса галеркинской информации.

S. G. Solodky, G. L. Myleiko

Hyperbolic cross and complexity of severely ill-posed problems

The problems of the economic discretization of severely ill-posed problems are studied. A projection scheme of discretization is proposed. In addition, due to the scheme, the order estimate of the minimal radius of Galerkin information is found.