УДК 513.88

Д. Ю. Якименко

Про унітарні оператори, що є добутком унітарних коренів з одиничного оператора

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)

Доведено, що будь-який унітарний оператор U в нескінченновимірному гільбертовому просторі можна подати як добуток трьох унітарних операторів U_1, U_2, U_3 таких, що $U_i^{m_i} = I$ при $m_i \in \mathbb{N}$, $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 \leqslant 1$ та m_2, m_3 — парні.

Нехай H — нескінченновимірний гільбертів простір. Через $\mathrm{Uni}(H)$ позначатимемо множину унітарних операторів в H. В [1] було доведено, що будь-який унітарний оператор U в H розкладається в добуток чотирьох симетрій (унітарних операторів, що в квадраті дають I), тобто

$$\forall\, U \in \mathrm{Uni}(H) \qquad \exists\, U_i \in \mathrm{Uni}(H)\colon \quad U = U_1U_2U_3U_4, \qquad U_i^2 = I, \qquad \dim H = \infty.$$

Аналогічний цьому результат, зокрема, було отримано в [2]:

$$\forall\, n \geqslant 3 \qquad \forall\, U \in \mathrm{Uni}(H) \qquad \exists\, U_i \in \mathrm{Uni}(H)\colon \quad U = U_1U_2U_3, \qquad U_i^n = I, \qquad \dim H = \infty.$$

В [3] доведено, що при $m_i \in \mathbb{N}$, $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 > 1$ не всі скалярні оператори можна розкласти в добуток трьох унітарних, що є коренями степеня m_i з I. Але при $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 \leqslant 1$ та за додаткової умови $m_2, m_3 \equiv 0 \mod 2$ будь-який скалярний оператор дозволяє відповідний розклад в H, $\dim H = \infty$. У даній роботі ми доводимо узагальнення вищенаведених результатів (теорема 1). Зауважимо, що подібні питання розглядалися, наприклад, для суми ортопроекторів у [4] та для добутку унітарих з двома точками в спектрі в [5].

Теорема 1. *Будь-який унітарний оператор U в нескінченновимірному гільбертовому просторі H є добутком трьох унітарних операторів $U = ABC$ таких, що $A^{m_1} = B^{m_2} = C^{m_3} = I$ при $m_i \geqslant 2$, $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 \leqslant 1$ та m_2, m_3 — парні.*

Доведення. Будь-який унітарний оператор у нескінченновимірному гільбертовому просторі розкладається в пряму суму двох унітарних операторів, які діють в нескінченновимірних гільбертових просторах однакової потужності [1]. Звідси, будь-який такий оператор можна розкласти в пряму суму нескінченної кількості унітарних операторів, які діють у просторах однакової потужності.

Отже, нехай

$$H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i, \qquad U = \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i, \qquad U_i \in \mathrm{Uni}(H_i).$$

Покладемо H_0 — гільбертів простір, ізоморфний до H_i, $i > 0$, а $R_i\colon H_i \to H_0$ — ізометрії з H_i до H_0, тобто $R_i^*R_i = I_{H_i}$, $R_iR_i^* = I_{H_0}$, $\forall\, i > 0$. Позначимо $I_0 = I_{H_0}$.

Розглянемо трикутну групу

$$T_{(m_1,m_2,m_3)} = \langle x, y, z \mid x^{m_1} = y^{m_2} = z^{m_3} = xyz = 1 \rangle.$$

В умовах теореми ця група нескінченна [6]. Розглянемо її (ліве) регулярне зображення підгрупою перестановок натуральних чисел. Елементу x буде відповідати деяка перестановка чисел з $\mathbb{N}$, яку ми позначимо X. Аналогічно, y відповідає перестановка Y, z відповідає Z. Зрозуміло, що для перестановок виконуються ті ж самі співвідношення $X^{m_1} = Y^{m_2} = Z^{m_3} = XYZ = 1$, через 1 позначимо тотожну перестановку $\mathbb{N}$.

Визначимо унітарні оператори A, B, $C \in \mathrm{Uni}(H)$ таким чином. Нехай $A|_{H_i} = R^*_{X(i)} A_i R_i$, де $A_i \in \mathrm{Uni}(H_0)$, $i > 0$, — деякі оператори. Звідси $A(H_i) = H_{X(i)}$, а оператор A, очевидно, є унітарним за побудовою. Аналогічно визначимо $B|_{H_i} = R^*_{Y(i)} B_i R_i$, $B_i \in \mathrm{Uni}(H_0)$; $C|_{H_i} = R^*_{Z(i)} C_i R_i$, $C_i \in \mathrm{Uni}(H_0)$.

Покажемо, що оператори A_i, B_i, C_i можна підібрати таким чином, що будуть виконуватись співвідношення

$$U = ABC, \qquad A^{m_1} = B^{m_2} = C^{m_3} = I,$$

для будь-якого наперед заданого $U \in \mathrm{Uni}(H)$, звідки випливатиме твердження теореми.

Умова $A^{m_1} = I$ еквівалентна такій:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad A_{X^{m_1-1}(n)} \cdots A_{X(n)} A_n = I_0.$$

Зауважимо, що $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $X^{m_1}(n) = n$.

Аналогічно, умови $B^{m_2} = I$, $C^{m_3} = I$ еквівалентні відповідно

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad B_{Y^{m_2-1}(n)} \cdots B_{Y(n)} B_n = I_0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad C_{Z^{m_3-1}(n)} \cdots C_{Z(n)} C_n = I_0.$$

Умова $U = ABC$ еквівалентна такій:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad A_{YZ(n)} B_{Z(n)} C_n = R_n U_n R_n^*.$$

Зауважимо, що $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $XYZ(n) = n$. Позначимо $Q_n = R_n U_n R_n^* \in \mathrm{Uni}(H_0)$.

Отже, маємо нескінченну систему рівнянь з нескінченною кількістю невідомих — A_i, B_i, C_i, та "коефіцієнтами" Q_i. Покажемо, що ця система має розв'язок.

По-перше, покладемо $A_i = I_0$, $\forall\, i > 0$. Залишиться

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad B_{Y^{m_2-1}(n)} \cdots B_{Y(n)} B_n = I_0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad C_{Z^{m_3-1}(n)} \cdots C_{Z(n)} C_n = I_0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad B_{Z(n)} C_n = Q_n.$$

Звідси маємо

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad C_n = B^*_{Z(n)} Q_n$$

та

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad B^*_n Q_{Z^{m_3-1}(n)} \cdots B^*_{Z^2(n)} Q_{Z(n)} B^*_{Z(n)} Q_n = I_0.$$

Останнє еквівалентне

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad B_n Q_n^* B_{Z(n)} \cdots Q^*_{Z^{m_3-2}(n)} B_{Z^{m_3-1}(n)} Q^*_{Z^{m_3-1}(n)} = I_0.$$

Отже, маємо таку систему:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad B_{Y^{m_2-1}(n)} \cdots B_{Y(n)} B_n = I_0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad B_n Q_n^* B_{Z(n)} Q^*_{Z(n)} \cdots B_{Z^{m_3-1}(n)} Q^*_{Z^{m_3-1}(n)} = I_0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad C_n = B^*_{Z(n)} Q_n.$$

Рівняння $B_{Y^{m_2-1}(n)} \cdots B_{Y(n)} B_n = I_0$ називатимемо рівняннями Y-типу, а $B_n Q_n^* B_{Z(n)} Q^*_{Z(n)} \cdots B_{Z^{m_3-1}(n)} Q^*_{Z^{m_3-1}(n)} = I_0$ — рівняннями Z-типу. Набір чисел $Oy(n) = \{n, Y(n), \ldots, Y^{m_2-1}(n)\}$ називатимемо Y-орбітою числа n, а $Oz(n) = \{n, Z(n), \ldots, Z^{m_3-1}(n)\}$ — Z-орбітою числа n.

Далі нам знадобиться лема з [3]:

Лема 1. *У групі* $T_{(m_1,m_2,m_3)} = \langle x, y, z \mid x^{m_1} = y^{m_2} = z^{m_3} = xyz = 1 \rangle$ *при* $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 \leqslant 1$ *та* $m_2 = 2l_2$, $m_3 = 2l_3$, l_2, $l_3 \in \mathbb{N}$ *мають місце такі нерівності:*

$$\forall\, k \neq 0: \quad (y^{l_2} z^{l_3})^k \neq 1, \qquad (y^{l_2} z^{l_3})^k y^{l_2} \neq 1, \qquad z^{l_3} (y^{l_2} z^{l_3})^k \neq 1.$$

З леми також випливає, що $y^{l_2} \neq 1$, $z^{l_3} \neq 1$. Зауважимо, що якщо P_1 та P_2 — перестановки, що відповідають різним елементам групи в регулярному зображенні, то $\forall\, n : P_1(n) \neq P_2(n)$. Тож маємо, що

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \forall\, k \neq 0: \quad Y^{l_2}(n) \neq n, \qquad Z^{l_3}(n) \neq n,$$

$$(Y^{l_2} Z^{l_3})^k(n) \neq n, \qquad (Y^{l_2} Z^{l_3})^k Y^{l_2}(n) \neq n, \qquad Z^{l_3} (Y^{l_2} Z^{l_3})^k(n) \neq n.$$

Уявимо, що кожне число $n \in \mathbb{N}$ з'єднано ребрами з $Y^{l_2}(n)$ та $Z^{l_3}(n)$. З вищенаведених нерівностей випливає, що кожне число з'єднано рівно з двома іншими числами та не має циклів. Отже, множина $\mathbb{N}$ розбивається на нескінченні ланцюги:

$$\cdots - Y^{l_2} Z^{l_3}(g_0) - Z^{l_3}(g_0) - g_0 - Y^{l_2}(g_0) - Z^{l_3} Y^{l_2}(g_0) - \cdots$$

$$\cdots - Y^{l_2} Z^{l_3}(g_1) - Z^{l_3}(g_1) - g_1 - Y^{l_2}(g_1) - Z^{l_3} Y^{l_2}(g_1) - \cdots$$

$$\ldots - Y^{l_2} Z^{l_3}(g_2) - Z^{l_3}(g_2) - g_2 - Y^{l_2}(g_2) - Z^{l_3} Y^{l_2}(g_2) - \ldots$$

$$\ldots$$

де $g_i \in \mathbb{N}$ — така послідовність, що g_k не з'єднано шляхом з попередніми g_i, $i < k$. Скінченна вийде кількість ланцюгів чи ні, нам буде не важливо.

Відзначимо, що з леми 1 також можна вивести таку лему

Лема 2. *У групі* $T_{(m_1,m_2,m_3)} = \langle x, y, z \mid x^{m_1} = y^{m_2} = z^{m_3} = xyz = 1 \rangle$ *при* $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 \leqslant 1$ *та* $m_2 = 2l_2$, $m_3 = 2l_3$, l_2, $l_3 \in \mathbb{N}$ *мають місце нерівності*

$$\forall\, r \in \mathbb{Z} \qquad \forall\, k \neq 0: \quad (y^{l_2} z^{l_3})^k \neq y^r, \qquad (y^{l_2} z^{l_3})^k y^{l_2} \neq y^r, \qquad z^{l_3} (y^{l_2} z^{l_3})^{k-1} \neq y^r,$$

$$\forall\, r \in \mathbb{Z} \qquad \forall\, k \neq 0: \quad (y^{l_2} z^{l_3})^k \neq z^r, \qquad (y^{l_2} z^{l_3})^k y^{l_2} \neq z^r, \qquad z^{l_3} (y^{l_2} z^{l_3})^{k-1} \neq z^r.$$

Доведення. Нехай $(y^{l_2}z^{l_3})^k = y^r$. Тоді $(y^{l_2}z^{l_3})^{km_2} = y^{rm_2} = 1$, що суперечить лемі 1. Нехай $(y^{l_2}z^{l_3})^k y^{l_2} = y^r$, тоді $(y^{l_2}z^{l_3})^k = y^{r-l_2}$ — протиріччя. Нехай $z^{l_3}(y^{l_2}z^{l_3})^{k-1} = y^r$. Тоді $(y^{l_2}z^{l_3})^k = y^{r+l_2}$ — протиріччя. Інші нерівності доводяться аналогічно.

З леми 2 випливає, що числа з одного ланцюга, які не з'єднані ребром, не можуть належати одній Y чи Z орбіті.

Перейдемо до розв'язання нашої системи рівнянь. Будемо встановлювати значення B_n для чисел n у такому порядку: $g_0, Y^{l_2}(g_0), Z^{l_3}Y^{l_2}(g_0), \ldots; Z^{l_3}(g_0), Y^{l_2}Z^{l_3}(g_0), \ldots; g_1, Y^{l_2}(g_1), Z^{l_3}Y^{l_2}(g_1), \ldots; Z^{l_3}(g_1), Y^{l_2}Z^{l_3}(g_1), \ldots; \ldots$. Тобто взяли g_i, пішли направо по ланцюгу, "дійшли" до кінця, пішли наліво, перейшли до наступного ланцюга.

Кожне B_n присутнє рівно в одному рівнянні типу Y та рівно в одному рівнянні типу Z. Самі значення B_n будемо встановлювати так. Якщо існують k_2, k_3 такі, що значення для $B_{Y^{k_2}(n)}$ та $B_{Z^{k_2}(n)}$ не встановлені, то беремо B_n будь-яким — жодна із систем не порушиться. Якщо всі $B_{Y^k(n)}$ (крім B_n, звісно) встановлені, але не всі $B_{Z^k(n)}$ встановлені, то значення для B_n однозначно знаходиться з відповідного рівняння Y-типу. Аналогічно, якщо встановлені всі $B_{Z^k(n)}$, але не всі $B_{Y^k(n)}$, то B_n однозначно знаходиться з відповідного рівняння Z-типу. Єдиний "поганий" випадок, коли нам доведеться встановлювати B_n, якщо всі $B_{Y^k(n)}$ та $B_{Z^k(n)}$ вже встановлені. Але насправді такого ніколи не трапиться. Дійсно, нехай ми встановили значення для перших k ланцюгів. Звідси випливає, що в кожній Y та Z орбіті у нас буде парна кількість встановлених для B_n значень, тому що разом з B_n будуть встановлені значення для $B_{Y^{l_2}(n)}$ та $B_{Z^{l_3}(n)}$ (зауважимо, що за рахунок нерівностей з леми 2 елементи з одного ланцюга можуть належати одній орбіті тоді й тільки тоді, коли вони з'єднані ребром). Отже, після встановлення значень для перших k ланцюгів у кожній орбіті залишиться парна кількість не встановлених значень B_n. Не важко бачити, що в такій ситуації встановлюючи значення B_n для $(k+1)$-го ланцюга, ми не натрапимо на "поганий" випадок — на кожному кроці в Y чи Z орбіті завжди лишатиметься вільне значення для деякого B_n. Таким чином, ми довели, що отриману нами систему рівнянь можна розв'язати для будь-яких значень $Q_i \in \mathrm{Uni}(H_0)$. Теорему доведено.

Наслідок. *При $m_i \geqslant 2$, $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 = 1$ будь-який унітарний оператор U в нескінченновимірному гільбертовому просторі H є добутком трьох унітарних операторів $U = ABC$ таких, що $A^{m_1} = B^{m_2} = C^{m_3} = I$.*

Доведення. Для $(m_1, m_2, m_3) = (2,4,4)$ чи $(3,2,6)$ це є безпосереднім наслідком теореми 1. Випадок $(3,3,3)$ виплитває з [2].

1. *Halmos P. R., Kakutani S.* Products of symmetries // Bull. Amer. Math. Soc. – 1958. – **64**, No 3, pt. 1. – P. 77–78.
2. *Hladnik M., Omladic M., Radjavi H.* Products of roots of the identity // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – **129**. – P. 459–465.
3. *Самойленко Ю. С., Якименко Д. Ю.* Скалярные операторы, равные произведению корней из единичного оператора // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 6. – С. 819–825.
4. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функц. анализ и его приложения. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20–35.
5. *Albeverio S., Rabanovich S.* Decomposition of a scalar operator into a product of unitary operators with two points in spectrum // Linear Algebra Appl. – 2010. – **433**. – P. 1127–1137.
6. *Magnus W.* Noneuclidean tesselations and their groups. – New York: Academic Press, 1974. – 208 p.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 01.02.2013

Д. Ю. Якименко

Про унитарные операторы, равные произведению унитарных корней из единичного оператора

Доказано, что любой унитарный оператор U в бесконечномерном гильбертовом пространстве можна представить как произведение трех унитарных операторов U_1, U_2, U_3 таких, что $U_i^{m_i} = I$, где $m_i \in \mathbb{N}$, $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 \leqslant 1$ и m_2, m_3 — четные.

D. Yu. Yakymenko

On the unitary operators expressible as a product of unitary roots of the identity operator

We prove that any unitary operator U in the infinite-dimensional Hilbert space is expressible as a product of three unitary operators U_1, U_2, U_3 such that $U_i^{m_i} = I$, where $m_i \in \mathbb{N}$, $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 \leqslant 1$, and m_2, m_3 are even numbers.