Доповіді
національної
академії наук
України

9 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

В. М. Бойко, Р. О. Попович

Умовні симетрії лінійного рівняння стрижня

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Вивчено умовні симетрії (1+1)*-вимірного лінійного рівняння стрижня, що ілюструє нову теорему про лінійні оператори редукції лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними.*

Для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними існують добре розвинуті методи побудови їх аналітичних розв'язків, зокрема, метод розділення змінних, різноманітні інтегральні перетворення, ряди Фур'є та їх узагальнення. У той же час дослідження симетрій таких рівнянь є важливим насамперед для розвитку нових методів самого симетрійного аналізу.

У цій роботі досліджено оператори редукції (які називають також некласичними або умовними симетріями) (1+1)-вимірного лінійного рівняння стрижня зі сталими коефіцієнтами $u_{tt}+\lambda u_{xxxx}=0$, $\lambda>0$, для невідомої функції u двох незалежних змінних t й x. Це рівняння описує поперечні коливання еластичного стрижня і є спеціальним випадком рівняння балки (рівняння Ейлера–Бернуллі). Ліївські симетрії та загальна проблема еквівалентності для класу рівнянь Ейлера–Бернуллі досліджувалися в роботах [1–3]. Без обмеження загальності, за допомогою масштабних перетворень за змінною t або x, можна покласти $\lambda=1$, тобто достатньо розглядати рівняння

$$u_{tt}+u_{xxxx}=0. \tag{1}$$

Деякі прості розв'язки цього рівняння наведено в [4, § 9.2.2]. Його максимальною алгеброю ліївської інваріантності є алгебра $\mathfrak{g}=\langle\partial_t,\partial_x,2t\partial_t+x\partial_x,u\partial_u,h(t,x)\partial_u\rangle$, де $h=h(t,x)$ — довільний розв'язок рівняння (1).

У п. 1 доведено теорему про лінійні оператори редукції загальних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Наступні два пункти одночасно ілюструють і формулювання, і доведення теореми. Опис сингулярних операторів редукції рівняння (1) у п. 2 є вичерпним. На противагу цьому у п. 3 знайдено лише часткові випадки регулярних операторів редукції рівняння (1).

1. Лінійні оператори редукції лінійного рівняння. Наведемо спочатку необхідні поняття і результати теорії умовних симетрій згідно з [5–9]. Розглянемо загальне диференціальне рівняння r-го порядку $\mathcal{L}$ вигляду $L(x, u_{(r)}) = 0$ для невідомої функції u від незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тут через $u_{(r)}$ позначено множину всіх похідних функції u відносно x порядку не вище ніж r, включаючи u як похідну нульового порядку. Будь-яке векторне поле Q у розшарованому просторі n незалежних змінних x і однієї залежної змінної u має вигляд $Q = \xi^i(x, u)\partial_i + \eta(x, u)\partial_u$, де коефіцієнти ξ^i й η — гладкі функції змінних x та u. Диференційовну функцію першого порядку $Q[u] = \eta - \xi^i u_i$ називають характеристикою векторного поля Q.

Тут і нижче індекс i змінюється від 1 до n; за індексами, що повторюються, йде підсумовування; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; δ_i — мультиіндекс, i-та компонента якого дорівнює 1, а всі інші компоненти нульові. Нижні індекси у функцій позначають диференціювання за відповідними змінними, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ й $\partial_u = \partial/\partial u$. Змінна u_α простору струменів r-го порядку $J^r = J^r(x|u)$ відповідає похідній $\partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$, а $u_i \equiv u_{\delta_i}$. Розгляд йде в рамках локально гладкого підходу. Тоді рівняння $\mathcal{L}$ можна інтерпретувати як алгебраїчне рівняння у просторі струменів J^r і ототожнити з многовидом його розв'язків у J^r:

$$\mathcal{L} = \{(x, u_{(r)}) \in J^r \mid L(x, u_{(r)}) = 0\}.$$

Символ $\mathcal{Q}_{(r)}$ використано для позначення многовиду, який визначено всіма диференціальними наслідками характеристичного рівняння $Q[u] = 0$ в J^r, тобто

$$\mathcal{Q}_{(r)} = \{(x, u_{(r)}) \in J^r \mid D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} Q[u] = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},\ |\alpha| < r\},$$

де $D_i = \partial_{x_i} + u_{\alpha+\delta_i}\partial_{u_\alpha}$ — оператор повної похідної за змінною x_i.

Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ називається *умовно інваріантним* відносно векторного поля Q, якщо виконується *критерій умовної інваріантності* $Q_{(r)}L(x, u_{(r)})|_{\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(r)}} = 0$ [5, 6, 9], де $Q_{(r)}$ — стандартне продовження векторного поля Q r-го порядку [10]. При цьому Q називають *оператором умовної симетрії* (або Q-умовної симетрії, або некласичної симетрії і т. д.) рівняння $\mathcal{L}$.

Рівняння $\mathcal{L}$ є умовно інваріантним відносно векторного поля Q тоді і лише тоді, коли анзац, побудований за Q, редукує $\mathcal{L}$ до диференціального рівняння з $n-1$ незалежними змінними [9]. Тому оператори умовної симетрії рівняння $\mathcal{L}$ коротко називають *операторами редукції* цього рівняння.

Оператори редукції $\widetilde{Q}$ й Q *еквівалентні*, $\widetilde{Q} \sim Q$, якщо вони відрізняються на множник, який є ненульовою функцією змінних x й u: $\widetilde{Q} = \lambda Q$, де $\lambda = \lambda(x, u) \neq 0$. Оператори редукції $\widetilde{Q}$ й Q еквівалентні відносно групи точкових перетворень G, якщо існує $g \in G$, для якого оператори Q і $g_*\widetilde{Q}$ еквівалентні в звичайному сенсі, де g_* — відображення, індуковане перетворенням g на множині векторних полів.

Розглянемо тепер лінійне диференціальне рівняння r-го порядку $\mathcal{L}$ вигляду

$$L[u] := \sum_{|\alpha| \leqslant r} a^\alpha(x) u_\alpha = 0$$

з невідомою функцією u незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$, де коефіцієнт a^α з $|\alpha| = r$ є ненульовим.

Серед лiївських симетрiй лiнiйних диференцiальних рiвнянь особливу роль вiдiграють симетрiї, асоцiйованi з лiнiйними диференцiальними операторами першого порядку, що дiють на $u = u(x)$. Якщо $n \geqslant 2$ i $r \geqslant 2$ або $n = 1$ i $r \geqslant 3$, то iз системи визначальних рiвнянь $\mathrm{SDE}(\mathcal{L})$ на коефiцiєнти векторних полiв з максимальної алгебри iнварiантностi $\mathfrak{g}^{\max}$ рiвняння $\mathcal{L}$ випливає, що $\xi^i_u = 0$ i $\eta_{uu} = 0$. Iншими словами, кожне таке векторне поле можна зобразити у виглядi

$$Q = \xi^i(x)\partial_i + (\eta^1(x)u + \eta^0(x))\partial_u, \tag{2}$$

причому iз системи $\mathrm{SDE}(\mathcal{L})$ додатково випливає, що η^0 є довiльним розв'язком рiвняння $\mathcal{L}$. Векторнi поля $\eta^0(x)\partial_u$, де η^0 пробiгає множину розв'язкiв рiвняння $\mathcal{L}$, утворюють iдеал алгебри $\mathfrak{g}^{\max}$ i генерують точковi перетворення, що асоцiйованi з лiнiйним принципом суперпозицiї. Якщо хоча б один з коефiцiєнтiв ξ^i або η^1 є ненульовим, з точнiстю до еквiвалентностi в $\mathfrak{g}^{\max}$, породженої приєднаними дiями елементiв iз iдеалу, можна покласти в (2) $\eta^0 = 0$.

Метою подальшого розгляду є розширення останнього твердження на оператори редукцiї вигляду (2), якi будемо називати *лiнiйними операторами редукцiї*. Варто зауважити, що загальнi умови, при яких лiнiйне диференцiальне рiвняння допускає лише оператори редукцiї, еквiвалентнi лiнiйним, на сьогоднi невiдомi.

Додатково слiд нагадати, що векторне поле Q називають (*слабо*) *сингулярним* для диференцiального рiвняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$, якщо iснує диференцiйовна функцiя $\widetilde{L} = \widetilde{L}[u]$ порядку менше r i ненульова диференцiйовна функцiя $\lambda = \lambda[u]$ порядку не вище r такi, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = \lambda\widetilde{L}|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. Iнакше Q є (*слабо*) *регулярним* векторним полем для $\mathcal{L}$. Векторне поле Q *ультрасингулярне* для рiвняння $\mathcal{L}$, якщо це рiвняння задовольняє будь-який розв'язок характеристичного рiвняння $Q[u] := \eta - \xi^i u_i = 0$. Властивостi сингулярних операторiв редукцiї описанi в [5, 7].

Теорема 1. *Нехай лiнiйне диференцiальне рiвняння $\mathcal{L}$ допускає оператор редукцiї Q вигляду* (2). *Тодi коефiцiєнт η^0 допускає зображення $\eta^0 = \xi^i\zeta^0_i - \eta^1\zeta^0$, де $\zeta^0 = \zeta^0(x)$ — розв'язок рiвняння $\mathcal{L}$. Отже, з точнiстю до еквiвалентностi, породженої дiєю групи лiївських симетрiй рiвняння $\mathcal{L}$ на множинi операторiв редукцiї цього рiвняння, коефiцiєнт η^0 можна покласти рiвним нулю. Будь-яке векторне поле вигляду $\xi^i\partial_i + (\eta^1 u + \xi^i\zeta_i - \eta^1\zeta)\partial_u$, де $\zeta = \zeta(x)$ — довiльний розв'язок рiвняння $\mathcal{L}$, є оператором редукцiї рiвняння $\mathcal{L}$.*

Доведення. Оскiльки Q є оператором редукцiї, то хоча б один iз коефiцiєнтiв ξ^i не є нульовим. Розглянемо векторне поле $\widehat{Q} = \xi^i(x)\partial_i + \eta^1(x)u\partial_u$. Нехай $X^1(x), \ldots, X^{n-1}(x)$ — функцiонально незалежнi розв'язки рiвняння $\xi^i v_i = 0$, i нехай $U(x)$ ненульовий розв'язок рiвняння $\xi^i v_i + \eta^1 v = 0$. Введемо позначення $X = (X^1, \ldots, X^n)$, тодi компоненти X та функцiя $U(x)u$ будуть функцiонально незалежними як функцiї змiнних (x, u). Це означає, що замiна змiнних $\mathcal{T}$: $\tilde{x} = X(x)$, $\tilde{u} = U(x)u$ добре визначена.

Виконаємо цю замiну змiнних i подамо всi об'єкти i спiввiдношення в нових змiнних $(\tilde{x}, \tilde{u})$. Так, векторне поле $\widehat{Q}$ збiгається з генератором зсувiв вiдносно змiнної $\tilde{x}_n$, $\widehat{Q} = \partial_{\tilde{x}_n}$, i тому $Q = \partial_{\tilde{x}_n} + \tilde{\eta}^0(\tilde{x})\partial_{\tilde{u}}$, де $\tilde{\eta}^0(\tilde{x}) = U(x)\eta^0(x)$, а характеристичне рiвняння асоцiйоване з векторним полем Q у нових змiнних має вигляд $\tilde{u}_{\tilde{x}_n} = \tilde{\eta}^0$. Замiна змiнних $\mathcal{T}$ також зберiгає лiнiйнiсть рiвняння $\mathcal{L}$, яке набуває вигляду

$$\widetilde{L}[\tilde{u}] = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \tilde{a}^\alpha(\tilde{x})\tilde{u}_\alpha = 0, \tag{3}$$

де кожен з коефiцiєнтiв $\tilde{a}^\alpha$ виражається через коефiцiєнти $a^{\alpha'}$, $|\alpha'| \geqslant |\alpha|$ та похiднi функцiй X^i i U. Змiнна $\tilde{u}_\alpha$ у просторi струменiв J^r вiдповiдає похiднiй $\partial^{|\alpha|}\tilde{u}/\partial\tilde{x}_1^{\alpha_1}\cdots\partial\tilde{x}_n^{\alpha_n}$. З точністю до ненульового множника, коефіцієнт $\widetilde{a}^{\alpha^0}$, де $|\alpha^0| = r$, можна зробити тотожно рівним 1.

Позначимо первісну функції $\widetilde{\eta}^0$ за змінною $\widetilde{x}_n$ через $\widetilde{\zeta}^0$: $\widetilde{\eta}^0 = \widetilde{\zeta}^0_{\widetilde{x}_n}$. Розглянемо окремо два випадки в залежності від того, чи є оператор редукції Q ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, і покажемо, що в кожному з цих випадків існує первісна $\widetilde{\zeta}^0$ функції $\widetilde{\eta}^0$, яка задовольняє зображення (3) рівняння $\mathcal{L}$ у нових змінних, тобто $\widetilde{L}[\widetilde{\zeta}^0] = 0$.

Припустимо, що оператор редукції Q є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Оскільки властивість ультрасингулярності не залежить від заміни змінних, кожен розв'язок характеристичного рівняння $\widetilde{u}_{\widetilde{x}_n} = \widetilde{\eta}^0$ задовольняє зображення $\widetilde{L}[\widetilde{u}] = 0$ рівняння $\mathcal{L}$ у нових змінних, тобто

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \widetilde{a}^{\alpha}\widetilde{\eta}^0_{\alpha-\delta_n} + \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n=0} \widetilde{a}^{\alpha}\widetilde{u}_{\alpha} = 0,$$

де похідні $\widetilde{u}_\alpha$ з $\alpha_n = 0$ не зв'язані. Розщеплюючи за ними, одержуємо систему рівнянь $\widetilde{a}^\alpha = 0$, де α пробігає множину мультиіндексів з $|\alpha| \leqslant r$ і $\alpha_n = 0$, і рівняння на коефіцієнт $\widetilde{\eta}^0$:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \widetilde{a}^{\alpha}\widetilde{\eta}^0_{\alpha-\delta_n} := \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \widetilde{a}^{\alpha}\widetilde{\zeta}^0_{\alpha} = 0.$$

Отже, підсумовування у рівнянні (3) насправді йде лише за мультиіндексами α, в яких $\alpha_n \neq 0$, а тому функція $\widetilde{\zeta}^0$ задовольняє це рівняння.

Припустимо тепер, що оператор редукції Q не є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Оскільки r-те продовження Q визначають як $Q_{(r)} = \partial_{\widetilde{x}_n} + \sum\limits_{|\alpha|\leqslant r} \widetilde{\eta}^0_\alpha(\widetilde{x})\partial_{\widetilde{u}_\alpha}$, то в цьому випадку з критерію умовної інваріантності отримуємо

$$Q_{(r)}\widetilde{L}[\widetilde{u}] = \sum_{|\alpha|\leqslant r} (\widetilde{a}^{\alpha}_{\widetilde{x}_n}\widetilde{u}_\alpha + \widetilde{a}^\alpha\widetilde{\eta}^0_\alpha) = 0 \tag{4}$$

для всіх точок простору струменів J^r, де $\widetilde{L}[\widetilde{u}] = 0$ і $\widetilde{u}_{\alpha'} = \widetilde{\eta}^0_{\alpha'-\delta_n}$ з $|\alpha'| \leqslant r$ і $\alpha_n > 0$. Оскільки $\widetilde{a}^{\alpha^0} = 1$, диференційовна функція $Q_{(r)}\widetilde{L}[\widetilde{u}]$ не залежить від похідної $\widetilde{u}_{\alpha^0}$, а тому умова $\widetilde{L}[\widetilde{u}] = 0$ не є суттєвою при переході на многовид $\mathcal{L} \bigcap \mathcal{Q}_{(r)}$. Враховуючи, що похідні $\widetilde{u}_\alpha$ з $\alpha_n = 0$ не є зв'язаними, розщеплення умови (4) за ними дає систему рівнянь $\widetilde{a}^\alpha_{\widetilde{x}_n} = 0$, де α пробігає множину мультиіндексів з $|\alpha| \leqslant r$ і $\alpha_n = 0$, як необхідну умову того, що рівняння $\mathcal{L}$ допускає оператор редукції Q. Тоді на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ маємо

$$\begin{aligned} Q_{(r)}\widetilde{L}[\widetilde{u}] &= \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n=0} \widetilde{a}^{\alpha}_{\widetilde{x}_n}\widetilde{u}_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \widetilde{a}^{\alpha}_{\widetilde{x}_n}\widetilde{u}_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r} \widetilde{a}^\alpha\widetilde{\eta}^0_\alpha = \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \widetilde{a}^{\alpha}_{\widetilde{x}_n}\widetilde{\eta}^0_{\alpha-\delta_n} + \sum_{|\alpha|\leqslant r} \widetilde{a}^\alpha\widetilde{\eta}^0_\alpha = \\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n=0} \widetilde{a}^{\alpha}_{\widetilde{x}_n}\widetilde{\zeta}^0_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \widetilde{a}^{\alpha}_{\widetilde{x}_n}\widetilde{\zeta}^0_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r} \widetilde{a}^\alpha\widetilde{\zeta}^0_{\alpha+\delta_n} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant r} \widetilde{a}^\alpha\widetilde{\zeta}^0_\alpha\right)_{\widetilde{x}_n} = 0. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши останню рівність за змінною $\widetilde{x}_n$, отримаємо, що функція $\widetilde{\zeta}^0 = \widetilde{\zeta}^0(x)$ задовольняє неоднорідне лінійне рівняння

$$\widetilde{L}[\widetilde{\zeta}^0] := \sum_{|\alpha|\leqslant r} \widetilde{a}^\alpha\widetilde{\zeta}^0_\alpha = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{5}$$

для деякої гладкої функції $g = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Оскільки в цьому випадку оператор редукції Q не є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, то існує мультиіндекс α з $|\alpha| \leqslant r$ і $\alpha_n = 0$ такий, що $\widetilde{a}^\alpha \neq 0$. Тоді рівняння (5) має частковий розв'язок h, який не залежить від змінної $\widetilde{x}_n$, тобто $h = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$[1]. Функція $\widetilde{\zeta}^0 - h$ також є первісною для $\widetilde{\eta}^0$ за змінною $\widetilde{x}_n$ і одночасно задовольняє відповідне однорідне лінійне рівняння, тобто $\widetilde{L}[\widetilde{\zeta}^0 - h] = 0$. Таким чином, без обмеження загальності можна вважати, що первісна $\widetilde{\zeta}^0$ сама є розв'язком рівняння (3), тобто $\widetilde{L}[\widetilde{\zeta}^0] = 0$.

Виконавши обернену заміну змінних у рівності $\widetilde{\eta}^0 = \widetilde{\zeta}^0_{\widetilde{x}_n} = \widehat{Q}\widetilde{\zeta}^0$ і ввівши у розгляд функцію $\zeta^0 = \widetilde{\zeta}^0/U$, яка задовольняє рівняння $\mathcal{L}$ у старих змінних (x, u), отримаємо $U\eta^0 = \xi^i(U\zeta^0)_i = U\xi^i\zeta^0_i + (\xi^i U_i)\zeta^0 = U(\xi^i\zeta^0_i - \eta^1\zeta^0)$, тобто $\eta^0 = \xi^i\zeta^0_i - \eta^1\zeta^0$. Тут враховано, що $\xi^i U_i = -\eta^1 U$. Відображення, породжене точковим перетворенням симетрії $\overline{x} = x$, $\overline{u} = u - \zeta^0(x)$ рівняння $\mathcal{L}$ на множині операторів редукції рівняння $\mathcal{L}$, переводить векторне поле Q у векторне поле $\widehat{Q}$, в якому коефіцієнт η^0 є нульовим. Це означає, що $\widehat{Q}$ є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}$. Застосовуючи аналогічне відображення, породжене перетворенням точкової симетрії $\overline{x} = x$, $\overline{u} = u + \zeta(x)$ з довільним розв'язком $\zeta = \zeta(x)$ рівняння $\mathcal{L}$, отримуємо, що будь-яке векторне поле вигляду $\xi^i\partial_i + (\eta^1 u + \xi^i\zeta_i - \eta^1\zeta)\partial_u$ є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}$. Теорему доведено.

Анзац, побудований для невідомої функції u за векторним полем Q, має вигляд

$$u = \frac{1}{U(x)}\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) + \zeta^0(x),$$

де φ — інваріантна залежна змінна, $\omega_1 = X^1(x)$, $\ldots$, $\omega_{n-1} = X^{n-1}(x)$ — інваріантні незалежні змінні, і приводить до такого редукованого рівняння:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r, \alpha_n = 0} \widetilde{a}^\alpha(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial\omega_1^{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} = 0.$$

Очевидно, що вигляд редукованого рівняння не залежить від параметр-функції $\zeta^0(x)$, тобто підстановка будь-якого розв'язку рівняння $\mathcal{L}$ замість $\zeta^0(x)$ приводить до того ж редукованого рівняння.

2. Сингулярні оператори редукції рівняння стрижня. Для лінійного рівняння стрижня (1) оператори редукції мають загальний вигляд

$$Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u,$$

де коефіцієнти τ, ξ й η — гладкі функції змінних (t, x, u), причому $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$. Аналогічно еволюційним рівнянням, векторне поле Q сингулярне для рівняння (1) тоді і лише тоді, коли коефіцієнт τ тотожно рівний нулю. Зауважимо, що векторні поля, слабо сингулярні для цього рівняння, також є сильно сингулярними для нього. Тоді $\xi \neq 0$, а тому, зважаючи на звичайну еквівалентність операторів редукції, можемо покласти $\xi = 1$. Іншими словами, для вичерпного опису сингулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня (1) достатньо розглянути векторні поля вигляду

$$Q = \partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u.$$

[1]Якщо $n > 2$, то для гарантованого існування класичних роз'язків необхідно припускати, що всі функції є аналітичними. У випадку $n = 2$ або для конкретних лінійних рівнянь можна вимагати меншу гладкість функцій.

Многовид $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{Q}_{(4)}$ визначається рівняннями $u_x=\eta$, $u_{xx}=\eta_x+\eta\eta_u$, $u_{xxx}=(\partial_x+\eta\partial_u)^2\eta$, $u_{xxxx}=(\partial_x+\eta\partial_u)^3\eta$, $u_{tt}=-u_{xxxx}=-(\partial_x+\eta\partial_u)^3\eta$. З критерію умовної інваріантності випливає, що $\eta_{tt}+2\eta_{tu}u_t+\eta_{uu}u_t^2-\eta_u(\partial_x+\eta\partial_u)^3\eta+(\partial_x+\eta\partial_u)^4\eta=0$. Збираючи коефіцієнти при різних степенях незв'язної похідної u_t і розщеплюючи відносно них, отримуємо систему трьох визначальних рівнянь для коефіцієнта η:

$$\eta_{uu}=0,\qquad \eta_{tu}=0,\qquad \eta_{tt}-\eta_u(\partial_x+\eta\partial_u)^3\eta+(\partial_x+\eta\partial_u)^4\eta=0.$$

Таким чином, на відміну від (1 ± 1)-вимірних еволюційних рівнянь, для кожного з яких є лише одне визначальне рівняння на коефіцієнт η сингулярних операторів редукції, еквівалентне у певному сенсі вихідному еволюційному рівнянню, знаходження операторів редукції для лінійного рівняння стрижня не є "no-go" проблемою. З рівнянь $\eta_{uu}=0$ і $\eta_{tu}=0$ для коефіцієнта η маємо $\eta=\eta^1(x)u+\eta^0(t,x)$, де $\eta^1=\eta^1(x)$ і $\eta^0=\eta^0(t,x)$ — гладкі функції відповідних змінних. Згідно з теоремою 1, з точністю до еквівалентності, що породжується максимальною ліївською групою симетрії $G^{\max}$ лінійного рівняння стрижня на множині операторів редукції цього рівняння, можна покласти $\eta^0=0$.

Покажемо це також за допомогою прямих обрахунків. Після підстановки виразу для η в останнє визначальне рівняння і додаткового розщеплення за степенями u отримуємо систему $\partial_x(\partial_x+\eta^1)^3\eta^1=0$, $\eta^0_{tt}-\eta^1\eta^{03}+\eta^{04}=0$, де функції η^{03} і η^{04} визначаються рекурентним співвідношенням $\eta^{00}:=\eta^0$ і $\eta^{0k}=\eta^{0,k-1}_x+\eta^0(\partial_x+\eta^1)^{k-1}\eta^1$, $k=1,2,3,4$. Виконаємо диференціальну підстановку

$$\eta^1=\frac{\theta_x}{\theta},\qquad \eta^0=\zeta_x-\frac{\theta_x}{\theta}\zeta,$$

де $\theta=\theta(x)$ і $\zeta=\zeta(t,x)$ — нові невідомі функції. Індукцією можна довести, що

$$\eta^{0k}=\frac{\partial^{k+1}\zeta}{\partial x^{k+1}}-\frac{\zeta}{\theta}\frac{d^{k+1}\theta}{dx^{k+1}},\qquad k=1,2,\dots.$$

Отже, диференціальна підстановка редукує систему для η^1 і η^0 до системи для θ і ζ:

$$\left(\frac{\theta_{xxxx}}{\theta}\right)_x=0,\qquad \zeta_{ttx}-\frac{\theta_x}{\theta}\zeta_{tt}-\frac{\theta_x}{\theta}\zeta_{xxxx}+\frac{\theta_x\theta_{xxxx}}{\theta^2}\zeta+\zeta_{xxxxx}-\frac{\theta_{xxxxx}}{\theta}\zeta=0.$$

Інтегруючи один раз перше рівняння, отримуємо лінійне звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами $\theta_{xxxx}=\kappa\theta$, де κ — стала інтегрування. Друге рівняння можна записати як

$$\left(\frac{\zeta_{tt}+\zeta_{xxxx}}{\theta}\right)_x-\left(\frac{\theta_{xxxx}}{\theta}\right)_x\zeta=0,\qquad \text{звідки}\qquad \left(\frac{\zeta_{tt}+\zeta_{xxxx}}{\theta}\right)_x=0.$$

Інтегруючи останнє рівняння за x, отримуємо рівняння $\zeta_{tt}+\zeta_{xxxx}=\rho(t)\theta$, де ρ — гладка функція змінної t. Функцію ζ визначено з точністю до перетворень $\widetilde{\zeta}=\zeta+\sigma\theta$, де σ — довільна гладка функція змінної t. Справді, $\widetilde{\zeta}_{tt}+\widetilde{\zeta}_{xxxx}=\rho\theta+\sigma_{tt}\theta+\sigma\kappa\theta=0$, якщо $\sigma_{tt}+\kappa\sigma=-\rho$. Іншими словами, можна вважати, що функція ζ задовольняє лінійне рівняння стрижня (1). Тому відображення, що породжується точковим перетворенням симетрії $\overline{t}=t$, $\overline{x}=x$, $\overline{u}=u-\zeta(t,x)$ рівняння (1) на множині операторів редукції цього рівняння, переводить векторне поле Q у векторне поле такого самого вигляду, де $\zeta=0$, і звідси $\eta^0=0$.

Твердження 1. *З точністю до еквівалентності за перетвореннями симетрії, пов'язаними з лінійним принципом суперпозиції, множину сингулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня вичерпують векторні поля вигляду* $Q_{\rm s} = \partial_x + \dfrac{\theta_x}{\theta} u\partial_u$*, де функція* $\theta = \theta(t,x)$ *задовольняє звичайне диференціальне рівняння* $\theta_{xxxx} = \kappa\theta$ *для деякої сталої* κ.

Анзац, побудований за оператором редукції Q, має вигляд $u = \theta(x)\varphi(\omega)$, де $\omega = t$ — інваріантна незалежна змінна, φ — інваріантна залежна змінна, і дає редуковане рівняння $\varphi_{\omega\omega} + \kappa\varphi = 0$. Відзначимо, що оператор редукції $Q_{\rm s}$ пов'язаний з розділенням змінних у лінійному рівнянні стрижня (1). Він еквівалентний деякому оператору ліївської симетрії лише за умови $\theta_x/\theta = \mathrm{const}$.

3. Регулярні оператори редукції рівняння стрижня. Для таких операторів коефіцієнт τ не є нульовим. З точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції можна покласти $\tau = 1$, тобто

$$Q = \partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u.$$

Суттєвими серед рівнянь, що визначаються многовидом $\mathcal{L}\bigcap\mathcal{Q}_{(4)}$, є рівняння

$$u_t = \eta - \xi u_x, \qquad u_{tx} = \eta_x + \eta u_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \xi u_{xx},$$
$$u_{tt} = -u_{xxxx} = \eta_t + \eta_u(\eta - \xi u_x) - (\xi_t + \xi_u(\eta - \xi u_x))u_x - \xi(\eta_x + \eta u_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \xi u_{xx}).$$

Збираючи коефіцієнти при $u_{xx}u_{xxx}$ в умові, що випливає з критерію умовної інваріантності, отримуємо рівняння $\xi_u = 0$. Інші члени з u_{xxx} дають рівняння $\eta_{uu} = 0$ і $\eta_{xu} = 3\xi_{xx}/2$. Таким чином, маємо $\xi = \xi(t,x)$, $\eta = \eta^1(t,x)u + \eta^0(t,x)$, де $\eta^1 := \dfrac{3}{2}\xi_x + \gamma(t)$ і $\gamma = \gamma(t)$ — гладка функція. Інші визначальні рівняння зводяться до вигляду

$$2\xi_t\xi + 5\xi_{xxx} + 4\xi^2\xi_x = 0, \tag{6}$$
$$\xi_{tt} + \xi_{xxxx} + 2(\eta^1\xi)_t + 2\xi_t\xi_x - 4\eta^1_{xxx} + 8\xi\xi_x\eta^1 - 4\xi\xi_x^2 = 0, \tag{7}$$
$$\eta^1_{tt} + \eta^1_{xxxx} + 2\eta^1\eta^1_t - 2\xi_t\eta^1_x + 4\xi_x(\eta^1_t + \eta^1\eta^1 - \xi\eta^1_x) = 0, \tag{8}$$
$$\eta^0_{tt} + \eta^0_{xxxx} + 2\eta^0\eta^1_t - 2\xi_t\eta^0_x + 4\xi_x(\eta^0_t + \eta^1\eta^0 - \xi\eta^0_x) = 0, \tag{9}$$

де всі η^1 слід замінити на $3\xi_x/2 + \gamma(t)$.

Аналогічно сингулярним операторам редукції, з теореми 1 знову маємо, що з точністю до еквівалентності, породженої максимальною групою ліївських симетрій $G^{\rm max}$ лінійного рівняння стрижня на множині операторів редукції цього рівняння, можна покласти $\eta^0 = 0$.

Покажемо, що пряме доведення цього факту не є тривіальним. Дійсно, нехай функція ζ визначається співвідношенням $\eta^0 = \zeta_t + \xi\zeta_x - \eta^1\zeta$. Виконавши підстановку цього співвідношення для η^0 у рівняння (9) та врахувавши рівняння (6)–(8) і $\eta_{xu} = 3\xi_{xx}/2$, отримуємо таке рівняння для функції ζ:

$$(\partial_t + \xi\partial_x - \eta^1 + 4\xi_x)(\zeta_{tt} + \zeta_{xxxx}) = 0,$$

тобто $\zeta_{tt} + \zeta_{xxxx} = h(t,x)$, де функція $h = h(t,x)$ задовольняє рівняння

$$h_t + \xi h_x + (-\eta^1 + 4\xi_x)h = 0.$$

Функцію $h = h(t, x)$ можна вважати рівною нулю. Дійсно, функція ζ визначається з точністю до доданка, що є розв'язком рівняння $g_t + \xi g_x - \eta^1 g = 0$. Кожен такий розв'язок можна зобразити $g = g^0(t, x)\varphi(\omega)$, де g^0 — фіксований розв'язок цього ж рівняння, φ — довільна функція від ω, і $\omega = \omega(t, x)$ — несталий розв'язок рівняння $\omega_t + \xi\omega_x = 0$. Тоді $\chi = \omega_x^4$ задовольняє рівняння $\chi_t + \xi\chi_x + 4\xi_x\chi = 0$. Таким чином, функція h допускає зображення $h = g^0\omega_x^4\psi(\omega)$ з деякою гладкою функцією ψ від ω. Вищезгадані визначальні рівняння означають, що векторне поле $\partial_t + \xi\partial_x + \eta^1 u\partial_u$ є оператором редукції рівняння $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$. Звідси маємо $g_{tt} + g_{xxxx} = g^0\omega_x^4\varphi_{\omega\omega\omega\omega} + \cdots = g^0\omega_x^4(\varphi_{\omega\omega\omega\omega} + \cdots)$, де вираз у дужках залежить лише від ω і через $(\cdots)$ позначено члени, що містять похідні від φ лише порядку менше, ніж чотири. Це означає, що анзац $g = g^0(t, x)\varphi(\omega)$ редукує рівняння $g_{tt} + g_{xxxx} = h$ до звичайного диференціального рівняння $\varphi_{\omega\omega\omega\omega} + \cdots = \psi$, яке безперечно має деякий розв'язок $\varphi^0 = \varphi^0(\omega)$. Віднімаючи відповідну функцію $g = g^0\varphi^0$ від функції ζ, занулимо функцію h.

Таким чином, без обмеження загальності можна вважати, що функція ζ задовольняє початкове рівняння (1). Тоді відображення, породжене точковим перетворенням симетрії $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u - \zeta(t, x)$ рівняння (1) на множині операторів редукції цього рівняння, переводить векторне поле Q у векторне поле того ж вигляду, де $\zeta = 0$, а тому $\eta^0 = 0$.

Отже, вивчення регулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня (1) зведено до розв'язання перевизначеної системи нелінійних диференціальних рівнянь (6)–(8) для функцій $\xi = \xi(t, x)$ і $\gamma = \gamma(t)$. (Нагадаємо, що $\eta^1 := 3\xi_x/2 + \gamma(t)$.) Побудова загального розв'язку цієї системи виявилася непередбачувано складною задачею. Тому нижче розглянуто лише часткові випадки регулярних операторів редукції, що виникають при накладенні додаткових обмежень на функції ξ і γ. Зокрема, складні і громіздкі обчислення в `Maple` показали, що кожен регулярний оператор редукції рівняння (1) з $\gamma = 0$ еквівалентний оператору лііївської симетрії цього рівняння. Аналогічний результат справедливий і при сукупності обмежень $\xi_{xx} = 0$ і $\xi \neq 0$. Регулярних операторів редукції, для яких $\xi_t = 0$ і $\xi_x \neq 0$, взагалі немає.

Припустимо, що $\xi = 0$. Тоді рівняння (6) і (7) стають тотожностями і коефіцієнт η^1 допускає зображення $\eta^1 = \gamma(t)$. З рівняння (8) отримуємо єдине звичайне диференціальне рівняння $\gamma_{tt} + 2\gamma\gamma_t = 0$ для функції γ, проінтегрувавши яке один раз, знаходимо $\gamma_t + \gamma^2 = -\kappa$, де κ — стала інтегрування. Звідси $\gamma = \varphi_t/\varphi$, де $\varphi = \varphi(t)$ — розв'язок лінійного звичайного диференціального рівняння $\varphi_{tt} + \kappa\varphi = 0$. Відповідний оператор редукції $Q_{\mathrm{r}} = \partial_t + \dfrac{\varphi_t}{\varphi}u\partial_u$ дає анзац $u = \varphi(t)\theta(\omega)$, де $\omega = x$ — інваріантна незалежна змінна і θ — інваріантна залежна змінна. Відповідне редуковане рівняння має вигляд $\theta_{\omega\omega\omega\omega} = \kappa\theta$, тобто, як і для сингулярного оператора редукції Q_{s} з твердження 1, регулярний оператор редукції Q_{r} пов'язаний з розділенням змінних у лінійному рівнянні стрижня (1). Цей оператор можна розглядати як регулярний відповідник оператора Q_{s}. Регулярний оператор Q_{r} еквівалентний деякому оператору ліївської симетрії лише за умови $\varphi_t/\varphi = \mathrm{const}$.

Основним результатом роботи є теорема 1 про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Як приклад, що ілюструє теорему, досліджено некласичні симетрії лінійного рівняння стрижня. Наступним кроком є узагальнення отриманих результатів на багатовимірні модулі редукції, породжені лінійними векторними полями.

Дослідження підтримано Австрійським науковим фондом (FWF), проект P25064.

1. *Morozov O. I., Wafo Soh C.* The equivalence problem for the Euler–Bernoulli beam equation via Cartan's method // J. Phys. A: Math. Theor. – 2008. – **41**. – 135206, 14 p.
2. *Ndogmo J. C.* Equivalence transformations of the Euler–Bernoulli equation // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2012. – **13**. – P. 2172–2177.
3. *Wafo Soh C.* Euler–Bernoulli beams from a symmetry standpoint – characterization of equivalent equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **345**. – P. 387–395.
4. *Polyanin A. D.* Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002. – 781 p.
5. *Boyko V. M., Kunzinger M., Popovych R. O.* Singular reduction modules of differential equations. – arXiv: 1201.3223, 30 p.
6. *Fushchych W. I., Tsyfra I. M.* On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – L45–L48.
7. *Kunzinger M., Popovych R. O.* Singular reduction operators in two dimensions // J. Phys. A: Math. Theor. – 2008. – **41**. – 505201, 24 p.
8. *Popovych R. O., Vaneeva O. O., Ivanova N. M.* Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation // Phys. Lett. A. – 2007. – **362**. – P. 166–173.
9. *Zhdanov R. Z., Tsyfra I. M., Popovych R. O.* A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 101–123.
10. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Інститут Вольфганга Паулі, Відень, Австрія

Надійшло до редакції 07.03.2013

В. Н. Бойко, Р. Е. Попович

Условные симметрии линейного уравнения стержня

Изучены условные симметрии (1+1)*-мерного линейного уравнения стержня, что иллюстрирует новую теорему о линейных операторах редукции линейных дифференциальных уравнений в частных производных.*

V. M. Boyko, R. O. Popovych

Conditional symmetries of the linear rod equation

Conditional symmetries of the (1+1)*-dimensional linear rod equation are studied, which illustrates a new theorem on linear reduction operators of linear partial differential equations.*