ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2014

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 551.510

В. М. Волощук, Я. В. Волощук

Параметризация нелокального турбулентного обмена

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. И. Осадчим)

Проведен общий анализ используемых в прикладных исследованиях методов параметризации турбулентной диффузии газоаэрозольных примесей. С этой целью использован оригинальный способ представления уравнений сохранения вещества в операторной форме. Получены, возможно впервые, и физически обоснованы схемы нелокальной параметризации турбулентного обмена, обобщающие их известные градиентные формы.

В прикладных исследованиях трансформации атмосферных газоаэрозольных образований обращают внимание, в первую очередь, на процессы их турбулентного рассеивания со временем. Описание этих процессов до настоящего времени базируется, как правило, на *классической теории турбулентной диффузии* как аналога молекулярной [1].

Основой классической теории турбулентной и молекулярной диффузии является предположение, что средняя плотность турбулентного потока вещества просто пропорциональна градиенту средней концентрации этого вещества в турбулентной среде.

Однако процессы рассеивания газоаэрозольных образований в турбулентной среде в действительности происходят не всегда совсем так. Как заметил Чанади еще 50 лет назад, процессы рассеивания газоаэрозольных примесей в турбулентной среде в некоторых случаях происходят так, как будто коэффициенты турбулентной диффузии зависят не только от статистических характеристик турбулентной среды, но и от параметров, характеризующих пространственный профиль рассеиваемой примеси. Эта интересная проблема до сих пор, насколько нам известно, окончательно не разрешена. Одно из возможных ее решений предлагаем в настоящем сообщении. При этом будет обобщен результат, анонсированный в публикациях [2, 3].

Мы будем исходить из основного закона сохранения, который всегда может быть представлен в следующей простой дифференциальной форме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{u}\varphi = 0, \tag{1}$$

где φ — плотность вещества или каких-то его суммируемых (аддитивных) свойств, отнесенных к единице объема; $\mathbf{u}$ — скорость переноса субстанции φ в пространстве, t — время.

Предполагаем, что скорость переноса может быть представлена в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle + \delta\mathbf{u}(t), \qquad \langle \delta\mathbf{u}(t)\rangle = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор положения в пространстве рассматриваемой дифференциально малой части движущейся турбулентной среды; угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю физически возможных турбулентных реализаций переноса (т. е. определяют так называемый *регулярный перенос*); последний член в первом выражении — турбулентные флуктуации переноса в среде, зависящие только от времени.

Если пространственный масштаб временных изменений регулярного переноса существенно превышает характерное время жизни турбулентных молей, тогда всегда можно подобрать такую систему координат, центр которой смещается в соответствии с регулярным переносом и в которой диффузионные процессы, связанные с турбулентностью среды, совершенно не зависят от существования регулярного переноса в этой среде.

При этих предположениях уравнение закона их сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r},t) + (\delta\mathbf{u}(t)\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r},t) = 0$$

всегда может быть представлено в следующей *операторной* форме:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \exp\{-(\zeta(\mathbf{t},\tau)\boldsymbol{\nabla})\}\varphi(\mathbf{r},t), \qquad \zeta(\mathbf{t},\tau) = \int\limits_{\tau}^{t}\delta\mathbf{u}(t_1)\,dt_1. \tag{3}$$

Здесь через $\boldsymbol{\nabla}$ обозначен дифференциальный вектор-оператор “набла”, а круглыми скобками обозначено, как обычно, скалярное произведение вектора ζ и дифференциального вектор-оператора $\boldsymbol{\nabla}$. При довольно общих предположениях относительно функции $f(\mathbf{r})$ и в том случае, когда ζ не зависит от $\mathbf{r}$, всегда выполняется соотношение (известная формула смещения аргумента):

$$\exp\{-(\zeta(\mathbf{t},\tau)\boldsymbol{\nabla})\}f(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r} - \zeta(\mathbf{t},\tau),t).$$

В соотношении (3) параметр τ — это, как правило, предыдущее время, но не обязательно. Оно в принципе может быть произвольным, но все же оно должно быть ограниченным снизу. Ведь среди огромного разнообразия различных физических ситуаций всегда существует такое начальное время, когда по тем или иным обстоятельствам произведен выброс (вброс) газоаэрозольных примесей в атмосферу, трансформацию которых со временем и рассматривают. Обозначим этот начальный момент времени через t_0. Так, с простой физической точки зрения должны выполняться, что вполне естественно, следующие неравенства: $\tau \geqslant t_0$ и $t \geqslant t_0$, а соотношение между τ и t — пока совершенно безразлично (единственное, что надо всегда иметь ввиду — при перестановке этих переменных ζ обязательно меняет знак: $\zeta(\mathbf{t},\tau) = -\zeta(\tau,\mathbf{t})$.

Уравнения (3) принадлежат, вообще говоря, к *классу стохастических* уравнений. Это значит, что начальному распределению $\varphi(\mathbf{r},t)$ при $t = t_0$ соответствует не одно какое-то распределение $\varphi(\mathbf{r},t)$ при $t > t_0$, а целая серия различных распределений — статистический ансамбль с определенными вероятностями его отдельных реализаций. Таким образом, решить стохастическую задачу — это значит отыскать статистический ансамбль $\varphi(\mathbf{r},t)$ при $t > t_0$

и определить вероятности его отдельных реализаций. Однако ограничиваются, как правило, изучением только *среднего по статистическому ансамблю.* Если стохастические уравнения (1)–(3) усреднить по статистическому ансамблю, то получим

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \langle\varphi(\mathbf{r},t)\rangle = \langle\exp\{-(\zeta(\mathbf{t},\tau)\boldsymbol{\nabla})\}\varphi(\mathbf{r},\tau)\rangle,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{j} = \langle\delta\mathbf{u}(t)\varphi(\mathbf{r},t)\rangle = \langle\delta\mathbf{u}(t)\exp\{-(\zeta(\mathbf{t},\tau)\boldsymbol{\nabla})\}\varphi(\mathbf{r},\tau)\rangle. \tag{4}$$

Определимся сначала с соотношением пространственно-временных масштабов турбулентных молей (L_t — пространственный и τ_t — временной их масштабы) и масштабов характерных пространственно-временных изменений переносимой ими субстанции (L_φ и τ_φ — соответственно). Заметим, что до сих пор такого типа соотношения нами совершенно не были здесь использованы — мы говорили только о соотношении пространственно-временных масштабов $\delta\mathbf{u}(t)$ и $\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle$. Если масштабы характерных пространственно-временных изменений переносимой турбулентными молями субстанции (L_φ и τ_φ соответственно) существенно больше пространственно-временных масштабов турбулентных молей, т. е.

$$L_\varphi \gg L_t, \qquad \tau_\varphi \gg \tau_t, \tag{5}$$

то в линейном приближении по этим соотношениям из (4) получаем известную формулу для среднего потока классической теории турбулентной (и молекулярной, конечно) диффузии [1].

Заметим, что в рассмотренном выше случае соотношения (4) играют существенную роль, а характер статистического ансамбля турбулентных флуктуаций — совершенно безразличен. Однако можно рассмотреть и другую ситуацию, когда статистический ансамбль турбулентных флуктуаций — *гауссов.* Тогда соотношения (5) совершенно не нужны, ибо даже при их невыполнении для гауссового статистического ансамбля всегда будут иметь место следующие уравнения:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \exp\left\{\frac{1}{2}s_{ij}\nabla_i\nabla_j\right\}\Phi(\mathbf{r},t_0), \qquad s_{ij} = \langle\zeta_i(t,t_0)\zeta_i(t,t_0)\rangle,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r},t) = D_{ij}(t)\nabla_i\nabla_j\Phi(\mathbf{r},t), \qquad D_{ij}(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}s_{ij}. \tag{6}$$

Здесь, как обычно, по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. При записи приведенных соотношений использованы известные формулы для центрированной гауссовой случайной величины. Третье соотноношение — результат обычного дифференцирования первого по времени t.

В соотношениях (6) положено $\tau = t_0$, чтобы полностью снять вопрос о коррелированности соответствующих функций, ведь первоначальное состояние газоаэрозольной системы действительно никак не может быть связано с его последующей трансформацией в турбулентной среде. Заметим, что уравнение (6) нашло блестящее подтверждение при соответствующей статистической обработке эмпирических данных (см., к примеру, [4]). А что же будет, если процесс не гауссов и условия (5) не выполняются? То, что турбулентное поле может быть не гауссово, показали результаты статистической обработки различных эмпирических данных, к примеру, эмпирических данных, полученных с помощью натурных измерений на высотной Обнинской метеорологической мачте [5].

Для решения этого вопроса примем (главным образом, для сокращения письма) следующее дополнительное предположение: турбулентное поле среды изотропно и в разных направлениях статистически независимо (перекрестные члены пренебрежимо малы):

$$s_{ij} = 0, \qquad D_{ij} = 0 \qquad \text{при} \qquad i \neq j, \qquad s_{ij} = \sigma^2, \qquad D_{ij} = D \qquad \text{при} \qquad i = j.$$

А это означает, что выражение для $\mathbf{j}$ можно представить в виде

$$\mathbf{j} = -D(t)F(\text{э}, (\zeta(t,t_0)\boldsymbol{\nabla}))\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{r},t), \qquad D(t) = \langle\delta\mathbf{u}(t)(\zeta(t,t_0)\rangle, \tag{7}$$

где $F(\text{э}, (\zeta\boldsymbol{\nabla}))$ — безразмерная операторная функция, характеризующая влияние на турбулентную диффузию отклонения турбулентного поля от гауссовости; э — неотрицательный безразмерный параметр, величиной которого мы будем оценивать, насколько турбулентное поле отличается от гауссового (единственное условие: при э $= 0$ турбулентное поле — гауссовое).

При довольно общих предположениях операторную функцию $F(\text{э}, (\zeta\boldsymbol{\nabla}))$ всегда можно представить в следующем интегральном виде:

$$F(\text{э}, (\zeta\boldsymbol{\nabla}))\Phi(\mathbf{r},t) = \int \mathbf{f}(\text{э}, L(t), \mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dV(\mathbf{r}'). \tag{8}$$

Здесь $dV(\mathbf{r}')$ обозначает интегрирование по неограниченному объему, интегрирование по переменной $\mathbf{r}'$. Такой вид операторной функции $F(\text{э}, (\zeta\boldsymbol{\nabla}))$ можно доказать, к примеру, с помощью ее фурье-преобразования по векторной переменной $\mathbf{r}$. Выделенная в $\mathbf{f}$ переменная $L(t)$ определяет характерную глубину проникновения турбулентных молей в среду газоаэрозольной примеси. Переменная $L(t)$, конечно, пропорциональна величине $\sigma(t,t_0)$.

Заметим, что в некоторых случаях можно просто положить $L(t) = \sigma(t,t_0)$, а коэффициентом пропорциональности между ними "нагрузить" параметр э, хотя в общем случае величины э и $L(t)$ могут быть независимы, что для каждой конкретной ситуации следует рассмотреть особо.

В соответствии с общими физическими соображениями функция $\mathbf{f}(\text{э}, L(t), \mathbf{r})$ должна обладать следующими свойствами:

1) должна быть такова, чтобы операторная функция $F(\text{э}, (\zeta\boldsymbol{\nabla}))$ сохраняла постоянную величину;

2) должна быть неотрицательна и довольно быстро исчезать при $\mathbf{r} \to \infty$;

3) должна удовлетворять следующему предельному (по параметрам э и $L(t)$, причем независимо) условию:

$$\mathbf{f}(\text{э}, L(t), \mathbf{r}) \to \delta(\mathbf{r}) \qquad \text{при} \qquad L(t) \to 0 \qquad \text{или} \qquad \text{(независимо)} \qquad \text{э} \to 0;$$

4) должна быть мультипликативной по произвольным пространственным направлениям и зависеть только от расстояния между двумя точками пространства.

Таким условиям может обладать только функция

$$\mathbf{f}(\text{э}, L(t), \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\text{э})^{\nu/2}L(t)^{\nu}} \exp\left[-\frac{\mathbf{r}^2}{2\text{э}L(t)^2}\right], \tag{9}$$

где ν — размерность пространства турбулентного обмена газоаэрозольной примесью.

При записи соотношения (9) использован прием, который был применен, возможно впервые, Максвеллом в кинетической теории газов (вспомните распределение Максвелла по тепловым скоростям молекул).

Соотношения (7)–(9) и представляют собой *основной предмет* настоящей публикации.

Таким образом, нами предложен и физически обоснован наиболее простой вариант нелокальной параметризации турбулентного обмена. Этот вариант параметризации турбулентного обмена может быть использован, когда пространственно-временные масштабы турбулентных флуктуаций газоаэрозольных примесей сравнимы или больше соответствующих пространственно-временных масштабов изменения их средних концентраций, а статистический ансамбль турбулентных флуктуаций — негауссов. Такой подход к проблеме турбулентного обмена рассмотрен здесь впервые.

1. *Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1964. – 368 с.
2. *Voloshchuk V. M., Boychetnko S. G., Voloshchuk Ya. V.* The basic properties of non-local parametrization of a turbulent exchange // 5th Int. Conf. Fog, Fog Collection and Dew). – 2010. – http//meetingorganizer.copernicus.org.
3. *Voloshchuk V. M., Voloshchuk Ya. V.* The non-local parametrization of turbulent exchange: numerical analysis. (EMS Annual Meeting). – 2010. – http//meetingorganizer.copernicus.org.
4. *Бызова Н. Л., Иванов В. Н., Гаргер Е. К.* Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1991. – 279 с.
5. *Бызова Н. Л., Иванов В. Н., Гаргер Е. К.* Турбулентность в пограничном слое атмосферы. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. – 264 с.

Украинский гидрометереологический институт НАН Украины и ГСЧС НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.01.2014

В. М. Волощук, Я. В. Волощук

Параметризація нелокального турбулентного обміну

Проведено загальний аналіз використовуваних у прикладних дослідженнях методів параметризації турбулентної дифузії газоаерозольних домішок. З цією метою використано оригінальний спосіб подання рівнянь збереження речовини в операторній формі. Отримано, можливо вперше, і фізично обгрунтовані схеми нелокальної параметризації турбулентного обміну, що узагальнюють їх відомі градієнтні форми.

V. M. Voloshchuk, Ja. V. Voloshchuk

Parametrization of a non-local turbulent exchange

The general analysis of the methods of parametrization of the turbulent diffusion of a gas-aerosol impurity used in applied researches is carried out. With this purpose, the original way of representation of the equations of conservation of a matter in the operator form is used. The schemes, circuits of non-local parametrization of the turbulent exchange, which generalize their known gradient forms, are obtained and physically proved, probably for the first time.