УДК 517.95

О. О. Ванєєва, О. Ю. Жалій

Груповий аналіз класу рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Виконано груповий аналіз (1+1)*-вимірних квазілінійних рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами. Знайдено групу еквівалентності всього класу та ширшу групу еквівалентності, що відповідає підкласу рівнянь з експоненціальною нелінійністю. Ліївські симетрії прокласифіковано з точністю до знайдених перетворень еквівалентності. Показано, що розмірність максимальних алгебр інваріантності досліджуваних рівнянь не перевищує чотирьох.*

Рівняння реакції-дифузії є важливими складовими багатьох моделей математичної фізики, хімії та біології. У багатьох випадках такі рівняння містять коефіцієнти, що залежать від просторової змінної. Наприклад, (1+1)-вимірні квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП)

$$u_t = u_{xx} + h(x)B(u), \qquad hB_{uu} \neq 0, \tag{1}$$

де $h = h(x)$ та $B = B(u)$ — довільні функції відповідних змінних, моделюють, зокрема, процеси популяційної генетики [1] та мікрохвильового нагрівання [2].

Одним з найбільш ефективних методів розв'язання нелінійних ДРЧП є метод ліївської редукції. Якщо (1+1)-вимірне ДРЧП допускає однопараметричну групу Лі скінченних неперервних перетворень, що діє регулярно та трансверсально на многовиді цього рівняння, то його можна редукувати до звичайного диференціального рівняння [3]. Отже, важливою є задача знаходження основної групи ліївських симетрій, яку допускає розглядуване рівняння, тобто групи Лі з максимальною кількістю параметрів, дія точкових невироджених перетворень з якої залишає таке рівняння інваріантним. Якщо диференціальне рівняння параметризоване деякими довільними функціями та/або сталими, то задача дослідження ліївських симетрій стає набагато складнішою і називається задачею групової класифікації. Розв'язання задачі групової класифікації передбачає виконання таких кроків: 1) побудова групи еквівалентності заданого класу диференціальних рівнянь; 2) відшукання ядра основних груп (основної групи, що допускається будь-яким рівнянням з класу); 3) знаходження всіх нееквівалентних випадків розширення ядра основних груп [4]. При цьому використовується інфінітезимальний підхід, розвинутий у роботах С. Лі: замість групи Лі точкових симетрій досліджуваного диференціального рівняння шукають відповідну алгебру Лі векторних полів.

Метою цієї роботи є розв'язання задачі групової класифікації квазілінійних рівнянь реакції-дифузії вигляду (1). Зауважимо, що ліївські симетрії деяких підкласів цього класу досліджено раніше. Так, групову класифікацію рівнянь (1) з $h = 1$ виконано В. А. Дородніциним ще у 1979 р. [5]. Клас (1) також містить рівняння Хакслі,

$$u_t = u_{xx} + h(x)u^2(1 - u),$$

ліївські симетрії яких вивчались у роботах [6, 7]. Також існує незначний перетин з результатами роботи [8], у якій з симетрійної точки зору досліджено класи рівнянь

$$u_t = u_{xx} + H(x)u^m + F(x)u, \tag{2}$$

$$u_t = u_{xx} + H(x)u^2 + G(x), \tag{3}$$

де $m \neq 0, 1$, $H \neq 0$. Зауважимо, що задачу групової класифікації для загального класу квазілінійних ДРЧП другого порядку еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x), \qquad F \neq 0,$$

розв'язано в роботі [9]. Однак групова класифікація рівнянь (1) з використанням тих результатів є більш складною задачею, ніж її безпосереднє розв'язання.

Група еквівалентності. За означенням Л. В. Овсяннікова група еквівалентності деякого класу диференціальних рівнянь складається з невироджених точкових перетворень незалежних та залежних змінних, які входять до рівняння, та довільних елементів (сталих та/або функцій) класу, що зберігають диференціальну структуру класу, але можуть змінювати довільні елементи. При цьому перетворення змінних не залежать від довільних елементів [4]. Зараз таку групу еквівалентності називають звичайною. Пізніше було введено поняття узагальненої групи еквівалентності [10], перетворення незалежних та залежних змінних з якої можуть містити довільні елементи класу. Групи еквівалентності, в яких перетворення довільних елементів є нелокальними (наприклад, нові довільні функції є інтегралами від старих довільних функцій), називаються розширеними [11].

Перетворення з групи еквівалентності утворюють підмножину в множині допустимих перетворень у класі диференціальних рівнянь. Допустимим перетворенням називають трійку, що складається з двох рівнянь заданого класу та перетворення, що переводить перше з них у друге. Якщо множина допустимих перетворень деякого класу диференціальних рівнянь вичерпується перетвореннями з групи еквівалентності, то такий клас називається нормалізованим [12]. Множина допустимих перетворень має структуру групоїда та називається також групоїдом еквівалентності [13].

Допустимі перетворення класу (1) будемо шукати прямим методом [14]. Розглянемо пару рівнянь з досліджуваного класу, тобто, рівняння (1) та рівняння

$$\widetilde{u}_{\widetilde{t}} = \widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} + \widetilde{h}(\widetilde{x})\widetilde{B}(\widetilde{u}) \tag{4}$$

і припустимо, що вони пов'язані точковим перетворенням $\mathcal{T}$ загального вигляду

$$\widetilde{t} = T(t), \qquad \widetilde{x} = X(t, x), \qquad \widetilde{u} = U(t, x, u), \tag{5}$$

де $T_t X_x U_u \neq 0$. У роботі [15] доведено, що для будь-яких підкласів класу ДРЧП вигляду $u_t = F(t, x, u)u_{xx} + G(t, x, u, u_x)$ з $F \neq 0$ допустимі перетворення не виходять з класу (5).

Виконавши заміну змінних (5) у рівнянні (4), отримаємо рівняння в старих змінних t, x та u. Оскільки цей вираз має тотожно дорівнювати нулю на многовиді, що задається рівнянням (1) у просторі струменів другого порядку J^2 незалежних змінних (t, x) та залежної змінної u, підставляємо до знайденого виразу праву частину (1) замість u_t. Коефіцієнти отриманої тотожності при змінних u_{xx} та u_x прирівнюємо до нуля, що приводить до визначальних рівнянь на функції T, X та U, одне з яких містить старі та нові довільні елементи:

$$U_{uu} = 0, \qquad {X_x}^2 = T_t, \qquad 2\frac{U_{xu}}{U_u} = -\frac{X_t X_x}{T_t} + \frac{X_{xx}}{X_x}, \tag{6}$$

$$T_t\widetilde{h}\widetilde{B} - U_u hB = U_t - U_{xx} - \frac{X_t}{X_x}U_x. \tag{7}$$

Розв'язуючи рівняння (6), знаходимо, що $T_t > 0$,

$$X = \varepsilon\sqrt{T_t}x + \sigma(t), \qquad U = U^1(t,x)u + U^0(t,x), \qquad U^1 = \zeta(t)\exp\left(-\frac{1}{8}\frac{T_{tt}}{T_t}x^2 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\sigma_t}{\sqrt{T_t}}x\right),$$

де U^0, σ та ζ — довільні гладкі функції відповідних змінних; $\varepsilon = \pm 1$. Тоді рівняння (7) набуває вигляду

$$T_t\widetilde{h}\widetilde{B} - U^1 hB = \sum_{i=0}^{1}\left(U_t^i - U_{xx}^i - \frac{1}{2}\frac{T_{tt}}{T_t}U_x^i x - \varepsilon\frac{\sigma_t}{\sqrt{T_t}}U_x^i\right)u^i, \tag{8}$$

де $u^1 = u$, $u^0 = 1$. Аналіз співвідношень (8) приводить до таких тверджень.

Теорема 1. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim$ класу* (1) *складається з невироджених точкових перетворень*

$$\widetilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_2, \qquad \widetilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \qquad \widetilde{u} = \delta_4 u + \delta_5, \qquad \widetilde{h} = \frac{\delta_4}{\delta_1^2\delta_0}h, \qquad \widetilde{B} = \delta_0 B,$$

де δ_j, $j = 0, \ldots, 5$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_0\delta_1\delta_4 \neq 0$.

З (8) випливає, що існують точкові перетворення між рівняннями з класу (1), які не належать до групи $G^\sim$. А саме існує підклас класу (1), група еквівалентності якого є не звичайною, а узагальненою розширеною.

Теорема 2. *Узагальнена розширена група еквівалентності $\widehat{G}^\sim_{\exp}$ класу рівнянь*

$$u_t = u_{xx} + h(x)(e^{nu} + r) \tag{9}$$

складається з невироджених точкових перетворень

$$\widetilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_2, \qquad \widetilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \qquad \widetilde{u} = \delta_4 u + \varphi(x),$$
$$\widetilde{h} = \frac{\delta_4}{\delta_1^2}e^{-\frac{n}{\delta_4}\varphi}h, \qquad \widetilde{n} = \frac{n}{\delta_4}, \qquad \widetilde{r} = e^{\frac{n}{\delta_4}\varphi}\left(r - \frac{\varphi_{xx}}{\delta_4 h}\right),$$

де r та δ_j, $j = 1, \ldots, 4$, — довільні сталі з $\delta_1\delta_4 \neq 0$. Компоненту перетворення для сталої r можна інтерпретувати як умову на функцію φ вигляду $\varphi_{xx} = \delta_4 h\left(r - \widetilde{r}e^{-\frac{n}{\delta_4}\varphi}\right)$.

З теореми 2 випливає, що клас (9) зводиться до класу $\widetilde{u}_t = \widetilde{u}_{xx} + \widetilde{h}(x)e^{n\widetilde{u}}$ перетворенням

$$\widetilde{t} = t, \qquad \widetilde{x} = x, \qquad \widetilde{u} = u + \varphi(x),$$

де $\widetilde{h}(\widetilde{x}) = e^{-\varphi(x)}h(x)$ та $\varphi_{xx} = rh(x)$. Клас (9) є нормалізованим. Отже, групу еквівалентності класу (9) з $r = 0$ можна знайти, поклавши $\widetilde{r} = r = 0$ у перетвореннях з групи $\widehat{G}^\sim_{\exp}$. Отримуємо наслідок теореми 2.

Наслідок 1. *Звичайна група еквівалентності $G^\sim_{\exp}$ класу рівнянь реакції-дифузії*

$$u_t = u_{xx} + h(x)e^{nu}$$

складається з невироджених точкових перетворень

$$\tilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \delta_4 u + \delta_5 x + \delta_6, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_4}{\delta_1^2} e^{-\frac{n}{\delta_4}(\delta_5 x + \delta_6)} h, \quad \tilde{n} = \frac{n}{\delta_4},$$

де δ_j*,* $j = 1, \ldots, 6$*, — довільні сталі з* $\delta_1\delta_4 \neq 0$.

Під час дослідження ліївської симетрії перетворення еквівалентності буде використано для спрощення обчислень та для запису отриманих результатів у компактній формі.

Класифікація ліївських симетрій. Дослідження ліївських симетрій у класі (1) виконуємо класичним методом [4], доповненим технікою розгалуженого розщеплення [15]. Шукаємо векторні поля вигляду

$$Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u,$$

що генерують однопараметричні групи ліївської симетрії фіксованого рівняння $\mathcal{L}$ з класу (1). Ці векторні поля породжують максимальну алгебру інваріантності $A^{\max} = A^{\max}(\mathcal{L})$ рівняння $\mathcal{L}$. Будь-який оператор ліївської симетрії Q задовольняє критерій інфінітезимальної інваріантності, тобто дія другого продовження $Q^{(2)}$ оператора Q на рівняння $\mathcal{L}$ приводить до умови, що тотожно дорівнює нулю на многовиді, визначеному рівнянням $\mathcal{L}$:

$$Q^{(2)}(u_t - u_{xx} - h(x)B(u))\big|_{u_t = u_{xx} + h(x)B(u)} = 0. \tag{10}$$

Після виключення u_t, використовуючи (1), ліву частину рівняння (10) можна розглядати як поліном змінних u_x, u_{xx} та u_{tx}. Коефіцієнти цього полінома мають тотожно дорівнювати нулю. В результаті отримуємо визначальні рівняння на невідомі функції τ, ξ та η. Найпростішими з цих рівнянь є $\tau_x = \tau_u = \xi_u = 0$, тобто $\tau = \tau(t)$ та $\xi = \xi(t, x)$. Тоді решта визначальних рівнянь набувають вигляду

$$2\xi_x = \tau_t, \qquad \eta_{uu} = 0, \qquad 2\eta_{xu} = \xi_{xx} - \xi_t, \tag{11}$$

$$\eta h B_u = (-\xi h_x + (\eta_u - \tau_t)h)B + \eta_t - \eta_{xx}. \tag{12}$$

Інтегруючи рівняння (11), отримуємо такі вирази для функцій ξ та η:

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t), \qquad \eta = \left(-\frac{1}{8}\tau_{tt} x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \zeta(t)\right)u + \eta^0(t, x),$$

де σ, ζ та η^0 — довільні гладкі функції своїх змінних. Тоді рівняння (12) має вигляд

$$\left(\left(\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \frac{1}{2}\sigma_t x - \zeta\right)u - \eta^0\right)hB_u = \left(\left(\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \frac{1}{2}\sigma_t x - \zeta + \tau_t\right)h + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)h_x\right)B + \left(\frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 + \frac{1}{2}\sigma_{tt}x - \zeta_t - \frac{1}{4}\tau_{tt}\right)u - \eta^0_t + \eta^0_{xx} \tag{13}$$

та називається класифікуючим рівнянням. Це рівняння потрібно розв'язати одночасно відносно функцій τ, σ, ζ та η^0, що визначають форму оператора Q, та функцій h та B, які є довільними елементами класу.

Для того щоб знайти максимальну алгебру ліївської інваріантності, що допускається будь-яким рівнянням з класу, а отже, відповідає ядру основних груп, класифікуюче рівняння треба розщепити відносно функцій h, B та їх похідних. У результаті отримуємо умови $\tau_t = \xi = \eta = 0$. Отже, доведено таке твердження.

Твердження 1. *Алгеброю Лі, що відповідає ядру основних груп рівнянь з класу* (1), *є одновимірна алгебра* $A^{\cap} = \langle \partial_t \rangle$.

Наступним кроком є відшукання всіх можливих нееквівалентних випадків розширення алгебри $A^{\cap}$, із застосуванням техніки розгалуженого розщеплення [15]. Для будь-якого оператора Q з алгебри $A^{\max}$ підстановка його коефіцієнтів у рівняння (13) дає рівняння на функцію B загального вигляду

$$(au+b)B_u = pB + qu + r, \tag{14}$$

де a, b, p, q та r — сталі, що визначені з точністю до ненульового множника. Множина $\mathcal{V}$ значень наборів коефіцієнтів (a,b,p,q,r), отримана варіюванням операторів з алгебри $A^{\max}$, є лінійним простором. Зауважимо також, що $(a,b) \neq (0,0)$ і розмірність $k = k(A^{\max})$ простору $\mathcal{V}$ не більша ніж 2. Якщо це не так, то з рівнянь (14) випливає, що або функція B є лінійною, або система рівнянь такого вигляду несумісна. Значення k є інваріантним відносно дії перетворень з групи $G^{\sim}$. Отже, існують три $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки для значення k: $k=0$, $k=1$ та $k=2$. Розглянемо ці можливості окремо.

I. Умова $k=0$ означає, що рівняння (13) є не рівнянням на B, а тотожністю. Розщеплення цього рівняння за функцією B та її похідною приводить до умов $\tau_{tt} = \sigma_t = \zeta = \eta^0 = 0$. Ми отримуємо, що $\tau = c_1 t + c_2$, $\sigma = c_3$ та класифікаційне рівняння на h має вигляд

$$\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_3\right)h_x + c_1 h = 0, \tag{15}$$

де c_1, c_2 та c_3 — довільні сталі. Якщо h є довільною функцією, то маємо алгебру $A^{\cap}$, що відповідає ядру основних груп та представлена у випадку 0 табл. 1. З рівняння (15) випливає, що розширення алгебри $A^{\cap}$ можливе у двох випадках: $h = \delta(x+\beta)^{-2}$ або $h = \delta$, де β та δ — довільні сталі, $\delta \neq 0$. З точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності можна покласти β рівним нулю та $\delta = \pm 1$ залежно від знаку δ. Отримані результати представлено у вип. 1 та 2 табл. 1.

II. Якщо $k=1$, то з точністю до ненульового сталого множника існує одне рівняння (14) на функцію B. Інтегрування цього рівняння дає три $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки:

1) $B = u^m + \beta_1 u + \beta_2$;

Таблиця 1. Групова класифікація рівнянь $u_t = u_{xx} + h(x)B(u)$, $hB_{uu} \neq 0$

№	$B(u)$	$h(x)$	Базисні оператори алгебри $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	$\forall$	δx^{-2}	∂_t, $2t\partial_t + x\partial_x$
2	$\forall$	δ	∂_t, ∂_x
3	u^m	δx^s	∂_t, $2(m-1)t\partial_t + (m-1)x\partial_x - (s+2)u\partial_u$
4	u^m	δe^x	∂_t, $(1-m)\partial_x + u\partial_u$
5	u^m	δ	∂_t, ∂_x, $2(m-1)t\partial_t + (m-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
6	e^u	δx^s	∂_t, $2t\partial_t + x\partial_x - (s+2)\partial_u$
7	e^u	$\delta e^{\pm x^2}$	∂_t, $\partial_x \mp 2x\partial_u$
8	e^u	δ	∂_t, ∂_x, $2t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_u$
9	$u\ln u$	δ	∂_t, ∂_x, $e^{\delta t}u\partial_u$, $e^{\delta t}\left(\partial_x - \frac{\delta}{2}xu\partial_u\right)$

Примітка. δ, m та s — довільні сталі, $m \neq 0, 1$, $s \neq 0$, $\delta = \pm 1 \bmod G^{\sim}$.

2) $B = e^u + \beta_1 u + \beta_2$;

3) $B = u \ln u + \beta_2$,

де β_1, β_2 та m — довільні сталі, $m \neq 0, 1$. На наступному кроці підставляємо кожне з цих значень B до рівняння (13) та розщеплюємо отриманий вираз за u, тобто прирівнюємо коефіцієнти лінійно незалежних функцій змінної u до нуля. Розглянемо ці випадки окремо.

II.1. Нехай $B = u^m + \beta_1 u + \beta_2$. Якщо $m \neq 2$, то розщеплення рівняння (13) дає умову $\eta^0 = 0$ та систему класифікуючих рівнянь на функцію h вигляду

$$\left(\frac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)h_x + ((1-n)W + \tau_t)h = 0, \qquad \beta_2\left(\left(\frac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)h_x + (W + \tau_t)h\right) = 0,$$

$$(1-\beta_1)\left(\frac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)h_x + (W + (1-\beta_1)\tau_t)h - W_t + \frac{1}{4}\tau_{tt} = 0,$$

де $W = \dfrac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \dfrac{1}{2}\sigma_t x - \zeta$, $W_t = \dfrac{\partial W}{\partial t}$. Дослідження сумісності цієї системи показує, що у випадку $\beta_2 \neq 0$ маємо $\tau = c_1 t + c_2$, $\sigma = c_3$, $\zeta = 0$, а класифікаційне рівняння на h набуває вигляду (15). Отже, цей випадок вкладається у вже розглянутий при $k = 0$.

Якщо $m \neq 2$ та $\beta_2 = 0$, то клас (1) є підкласом класу (2) з $H(x) = h(x)$ та $F(x) = \beta_1 h(x)$. Використавши результати роботи [8], знаходимо, що розширення $A^\cap$ можливе, якщо $\beta_1 = 0$ та функція h має один з виглядів, представлених у вип. 3, 4 та 5 табл. 1. Якщо $\beta_1 \neq 0$, то випадки розширення алгебри $A^\cap$ вкладаються у вип. 1 та 2 табл. 1.

Якщо $B = u^2 + \beta_1 u + \beta_2$, то сталу β_1 можна завжди покласти рівною нулю за допомогою перетворення $u \mapsto u - \beta_1/2$. Тоді клас (1) збігається з (3), де $H(x) = h(x)$ та $G(x) = \beta_2 h(x)$. Використовуючи результати роботи [8], знаходимо випадки розширення ліївської симетрії, представлені у вип. 1 та 2 табл. 1, якщо $\beta_2 \neq 0$, та вип. 3–5 табл. 1, якщо $\beta_2 = 0$.

II.2. Якщо $B = e^u + \beta_1 u + \beta_2$, то з класифікаційного рівняння (13) випливає, що $\tau_{tt} = \sigma_t = \zeta = 0$. Отже, $\tau = c_1 t + c_2$, $\sigma = c_3$ та система рівнянь на h має вигляд

$$\left(\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_3\right)h_x + c_1 h\right)\beta_1 = 0, \qquad \eta^0 h + \left(\frac{1}{2}c_1 x + c_3\right)h_x + c_1 h = 0,$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_3\right)h_x + c_1 h\right)\beta_2 + \eta^0 h \beta_1 + \eta^0_{xx} - \eta^0_t = 0.$$

У випадку $\beta^1 \neq 0$ маємо, що $\eta^0 = 0$ і всі рівняння на h збігаються з (15). Тобто, цей випадок включається до випадку довільного B. Якщо $\beta^1 = 0$, то β_2 можна зробити нулем, використовуючи перетворення з умовної групи еквівалентності: $\widehat{G}^\sim{}_{\exp}$. Отже, $\eta^0 = c_4 x + c_5$, де c_4 та c_5 — довільні сталі, а класифікуюче рівняння на функцію h має вигляд

$$\left(\frac{1}{2}c_1 x + c_3\right)h_x + (c_4 x + c_5 + c_1)h = 0. \qquad (16)$$

У комбінації з множенням на довільну ненульову сталу κ кожне перетворення з групи еквівалентності $G^\sim_{\exp}$ продовжується на коефіцієнти c_i, $i = 1, 3, 4, 5$, таким чином:

$$\widetilde{c}_1 = \kappa c_1, \qquad \widetilde{c}_3 = \kappa\left(c_3\delta_1 - \frac{1}{2}c_1\delta_3\right), \qquad \widetilde{c}_4 = \frac{\kappa}{\delta_1}\left(c_4 + \frac{1}{2}c_1\delta_5\right),$$

$$\widetilde{c}_5 = \frac{\kappa}{\delta_1}\left(c_5\delta_1 + c_3\delta_1\delta_5 - c_4\delta_3 - \frac{1}{2}c_1\delta_3\delta_5\right).$$

Аналіз цих виразів приводить до твердження.

Лема 1. *З точністю до $G^{\sim}_{\rm exp}$-еквівалентності четвірка параметрів* (c_1, c_3, c_4, c_5) *набуває одного зі значень* $(1, 0, 0, \overline{c}_5)$, $(0, 1, \pm 2, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, *де* $\overline{c}_5$ *— довільна стала.*

Після інтегрування рівняння (16) з точністю до $G^{\sim}_{\rm exp}$-еквівалентності отримуємо три форми h, представлені у вип. 6–8 табл. 1. У вип. 6 використано позначення $s = -2(\overline{c}_5 + 1)$.

II.3. Якщо $B = u\ln u + \beta_2$, то $\eta^0 = 0$ і класифікаційні умови набувають вигляду

$$\left(\frac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)h_x + \tau_t h = 0, \qquad \left(\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \frac{1}{2}\sigma_t x - \zeta\right)h = \frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 + \frac{1}{2}\sigma_{tt}x - \zeta_t - \frac{1}{4}\tau_{tt},$$

$$\beta_2\left(\left(\frac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)h_x + \left(\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \frac{1}{2}\sigma_t x - \zeta + \tau_t\right)h\right) = 0.$$

З цієї системи випливає, що якщо $\beta_2 \neq 0$ або $\beta_2 = 0$, але $h_x \neq 0$, то $\tau_{tt} = \sigma_t = \zeta = 0$. Тоді $\tau = c_1 t + c_2$, $\sigma = c_3$ і класифікаційне рівняння на h збігається з рівнянням (15). Іншими словами, виокремлено підвипадки вип. 1 та 2 табл. 1. Якщо ж $\beta_2 = 0$ та $h = \delta = \text{const}$, то з класифікаційних рівнянь випливають умови $\tau_t = \sigma_{tt} - \delta\sigma_t = \zeta_t - \delta\zeta = 0$. Тоді $\tau = c_1$, $\xi = c_2 + c_3 e^{\delta t}$, $\eta = (-(\delta/2)c_3 x + c_4)e^{\delta t}u$. У цьому випадку відбувається розширення алгебри $A^{\cap}$ трьома незалежними операторами ліївської симетрії (див. вип. 9 табл. 1).

III. Нехай $k = 2$. Виберемо базис $\{(a_i, b_i, p_i, q_i, r_i),\ i = 1, 2\}$ простору $\mathcal{V}$ впорядкованих наборів (a, b, p, q, r), асоційованих з $A^{\max}$. Тоді система на функцію B має вигляд

$$(a_1 u + b_1)B_u = p_1 B + q_1 u + r_1,$$
$$(a_2 u + b_2)B_u = p_2 B + q_2 u + r_2.$$

Матриця $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ є невиродженою, бо інакше функція B лінійна за u. Отже, систему можна переписати у вигляді

$$uB_u = p'_1 B + q'_1 u + r'_1,$$
$$B_u = p'_2 B + q'_2 u + r'_2,$$

де $\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$; M^{-1} — обернена до M матриця. Ця система є сумісною, тільки якщо функція B лінійна або квадратична за u. Випадок квадратичної функції B вже розглянуто під час дослідження у п. II.1. Отже, випадок $k = 2$ не призводить до нових випадків розширення ліївської симетрії для рівнянь (1) з $B_{uu} \neq 0$.

Задачу групової класифікації рівнянь (1) повністю розв'язано. Результати підсумовано у табл. 1. Зауважимо, що групову класифікацію підкласу (9) виконано з точністю до перетворень з групи еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}{}_{\rm exp}$, а класифікацію для решти рівнянь з класу (1) — з точністю до перетворень зі звичайної групи еквівалентності $G^{\sim}$ всього класу. Результати групової класифікації можна застосувати для пошуку точних розв'язків рівнянь з класу (1) з коефіцієнтами, наведеними у табл. 1.

Автори висловлють подяку професору Р. О. Поповичу за цінні зауваження до роботи.

1. *Fleming W. H.* A selection-migration model in population genetics // J. Math. Biol. – 1975. – **2**, No 3. – P. 219–233.
2. *Hill J. M., Marchant T. R.* Modelling microwave heating // Appl. Math. Model. – 1996. – **20**, No 1. – P. 3–15.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
5. *Дородницын В. А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком. – Москва, 1979. – 32 с. – (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 57).
6. *Bradshaw-Hajek B.* Reaction-diffusion equations for population genetics: PhD thesis. – Wollongong: University of Wollongong, 2004. – 185 p.
7. *Ivanova N. M.* On Lie symmetries of a class of reaction-diffusion equations // Proc. of the 4th Intern. Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems". – Nicosia: University of Cyprus, 2009. – P. 84–86.
8. *Vaneeva O. O., Popovych R. O., Sophocleous C.* Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source // Acta Appl. Math. – 2009. – **106**, No 1. – P. 1–46.
9. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**, No 1. – P. 43–94.
10. *Meleshko S. V.* Group classification of the equations of two-dimensional motions of a gas // J. Appl. Math. Mech. – 1994. – **58**, No 4. – P. 629–635.
11. *Ivanova N. M., Popovych R. O., Sophocleous C.* Conservation laws of variable coefficient diffusion-convection equations // Proc. of 10th Intern. Conf. in Modern Group Analysis. – Nicosia: University of Cyprus, 2005. – P. 107–113.
12. *Popovych R. O., Kunzinger M., Eshraghi H.* Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations // Acta Appl. Math. – 2010. – **109**, No 2. – P. 315–359.
13. *Popovych R. O., Bihlo A.* Symmetry preserving parameterization schemes // J. Math. Phys. – 2012. – **53**. – 073102, 36 p.
14. *Kingston J. G., Sophocleous C.* On form-preserving point transformations of partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**, No 6. – P. 1597–1619.
15. *Popovych R. O., Ivanova N. M.* New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // Ibid. – 2004. – **37**, No 30. – P. 7547–7565.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 08.04.2014

Е. А. Ванеева, А. Ю. Жалий

Групповой анализ класса уравнений реакции-диффузии с переменными коэффициентами

Выполнен групповой анализ (1+1)*-мерных квазилинейных уравнений реакции-диффузии с переменными коэффициентами. Найдены группа эквивалентности всего класса и более широкая группа эквивалентности, которая соответствует подклассу уравнений с экспоненциальной нелинейностью. Лиевские симметрии проклассифицированны с точностью до найденных преобразований эквивалентности. Показано, что размерность максимальных алгебр инвариантности исследуемых уравнений не превышает четырех.*

O. O. Vaneeva, O. Yu. Zhalij

Group analysis of a class of reaction-diffusion equations with variable coefficients

The group analysis of (1+1)*-dimensional quasilinear reaction-diffusion equations with variable coefficients is carried out. An equivalence group of the whole class and a wider equivalence group that corresponds to the subclass with exponential nonlinearity are found. Lie symmetries are classified up to the derived equivalence transformations. It is shown that the dimensions of maximal Lie invariance algebras of the equations under study are not greater than four.*