УДК 517.956.4

В. М. Лось

Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Для деяких класів гільбертових просторів узагальненої гладкості встановлено теорему про коректну розв'язність параболічних мішаних задач для систем Петровського з однорідними початковими даними Коші. Регулярність функцій, що утворюють ці простори, характеризується парою числових параметрів і функціональним параметром, повільно змінним на нескінченності за Карамата. Встановлено теорему про локальне підвищення регулярності розв'язку задачі. Отримано нові достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) розв'язку.

Останнім часом функціональні простори узагальненої гладкості знаходять важливі застосування в теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними [1–4]. На відміну від класичних просторів Гельдера, Соболєва і Нікольського–Бєсова, для просторів узагальненої гладкості показником регулярності належних ним функцій служить не числовий, а функціональний параметр, залежний від частотних змінних. Останній дає можливість більш тонко охарактеризувати регулярність функцій, виходячи з поведінки на нескінченності їх перетворення Фур'є.

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [4, 5] побудували теорію розв'язності загальних еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах просторів $H^{s,\varphi} := H^{\mu}$, для яких показником регулярності є функція вигляду $\mu(\xi) := (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi((1+|\xi|^2)^{1/2})$. Тут числовий параметр s дійсний, а функціональний параметр φ повільно змінний на нескінченності за Й. Карамата. Простір H^{μ} на $\mathbb{R}^n$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що добуток їх перетворення Фур'є на функцію μ є квадратично інтегровним на $\mathbb{R}^n$. Для загальної вагової функції μ цей простір був введений і досліджений Л. Хермандером [6] і Л. Р. Волевічем, Б. П. Панеяхом [7].

У цій роботі дано застосування просторів H^{μ} у теорії параболічних диференціальних рівнянь. Для параболічних за Петровським систем [8, с. 100] буде доведена теорема про коректну розв'язність мішаної (тобто початково-крайової) задачі в класі гільбертових анізотропних просторів Хермандера $H^{s,s/(2b),\varphi}$, де параметри s і φ є такими самими, як і в згаданій еліптичній теорії. Ми обмежуємося важливим випадком [9], коли початкові дані Коші є нульовими. Як застосування цього результату буде встановлена теорема про локальну регулярність розв'язків розглянутої задачі та будуть отримані нові достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних (заданого порядку) розв'язків. Ці результати доповнюють відомі теореми М. С. Аграновіча, М. І. Вішика [10], М. В. Житарашу, С. Д. Ейдельмана [11] і В. А. Солоннікова [9, 12] про характер розв'язності в просторах Соболєва мішаних задач для параболічних систем.

Відзначимо, що у випадку одного параболічного рівняння коректна розв'язність мішаної задачі в просторах $H^{s,s/(2b),\varphi}$ доведена в роботах О. О. Мурача і автора [13, 14].

1. Постановка задачі. Нехай довільно задані ціле число $n \geqslant 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Розглянемо в циліндрі $\Omega := G \times (0, \tau)$, де $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня, початково-крайову параболічну за Петровським задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь з нульовими початковими даними:

$$\sum_{k=1}^{N} A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t) = f_j(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\ldots,N\}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t)\big|_S = g_j(x,t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < \tau, \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{2}$$

$$\partial_t^r u_k(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{при} \quad x \in G \quad \text{для всіх} \quad k \in \{1,\ldots,N\}, \quad r \in \{0,\ldots,\varkappa_k - 1\}. \tag{3}$$

Тут лінійні диференціальні вирази мають вигляд

$$A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \sum_{|\alpha|+2b\beta \leqslant 2b\varkappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)D_x^\alpha \partial_t^\beta, \tag{4}$$

$$B_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|+2b\beta \leqslant l_j+2b\varkappa_k} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)D_x^\alpha \partial_t^\beta, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k < 0, \end{cases} \tag{5}$$

для всіх припустимих значень індексів j, k. У цій задачі ми довільним чином вибрали натуральні числа $N \geqslant 2$, b і $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_N$, поклали $m := b(\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_N)$ і вибрали ще m цілих чисел $l_1,\ldots,l_m$. Число $2b$ називається параболічною вагою даної задачі. Всі коефіцієнти диференціальних виразів $A_{j,k}$ та $B_{j,k}$ є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями: $a_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $b_{j,k}^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{S})$, де $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$, $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$.

У формулах (4) і (5) використано такі позначення частинних похідних: $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_k := i\partial/\partial x_k$ та $\partial_t := \partial/\partial t$. Тут $x = (x_1,\ldots,x_n)$ є довільною точкою простору $\mathbb{R}^n$, а $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультиіндексом і $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Підсумовування здійснюється за цілими індексами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta \geqslant 0$, що задовольняють умови, зазначені під знаком суми.

Запишемо головні символи диференціальних операторів (4) і (5):

$$A_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p) := \sum_{|\alpha|+2b\beta = 2b\varkappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\xi^\alpha p^\beta,$$

$$B_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p) =: \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|+2b\beta = l_j+2b\varkappa_k} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t)\xi^\alpha p^\beta, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad l_j + 2b\varkappa_k < 0. \end{cases}$$

Ці символи є однорідними поліномами за сукупністю аргументів $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{C}^n$ і $p \in \mathbb{C}$ (як завжди, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$). Утворимо матриці

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) := (A_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p))_{j,k=1}^N, \qquad B^{(0)}(x,t,\xi,p) := (B_{j,k}^{(0)}(x,t,\xi,p))_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,N}}.$$

Нагадаємо [12, розд. 1, § 1], що початково-крайова задача (1)–(3) називається параболічною за Петровським у циліндрі Ω, якщо виконуються такі три умови:

Умова 1. Для довільно вибраних точок $x \in \overline{G}$, $t \in [0, \tau]$ і вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ усі корені многочлена $\det A^{(0)}(x, t, \xi, p)$ за змінною $p \in \mathbb{C}$ задовольняють нерівності $\operatorname{Re} p(x, t, \xi) \leqslant -\delta|\xi|^{2b}$ зі сталою $\delta > 0$, яка не залежить від x, t і ξ.

Умова 2. У системі (1) кожне рівняння з номером $j \in \{1, \ldots, N\}$ розв'язуване відносно похідної $\partial_t^{\varkappa_j} u_j$ і не містить жодної похідної вигляду $\partial_t^{\varkappa_k} u_k$, де $k \neq j$. Тому можна вважати, що $a_{j,k}^{(0,0,\ldots,0),\varkappa_k}(x, t) \equiv \delta_{j,k}$ для довільних j, $k \in \{1, \ldots, N\}$; тут $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

Нехай число $\delta_1 \in (0, \delta)$, де δ — стала з умови 1. Виберемо довільним чином точки $x \in \Gamma$, $t \in [0, \tau]$, вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, дотичний до межі Γ у точці x, і число $p \in \mathbb{C}$ такі, що $\mathrm{Re} p \geqslant -\delta_1 |\xi|^{2b}$ і $|\xi| + |p| > 0$. Нехай $\nu(x)$ є орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці x. З умови 1 випливає, що многочлен $\det A^{(0)}(x, t, \xi + \zeta\nu(x), p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має точно m коренів $\zeta_j^+(x, t, \xi, p)$, $j = 1, \ldots, m$, з додатною уявною частиною та решту m коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

Умова 3. Для деякого числа $\delta_1 \in (0, \delta)$ та при кожному зазначеному вище виборі параметрів x, t, ξ і p рядки матриці

$$B^{(0)}(x, t, \xi + \zeta\nu(x), p) \cdot \widetilde{A}^{(0)}(x, t, \xi + \zeta\nu(x), p)$$

є лінійно незалежними за модулем многочлена $\prod\limits_{j=1}^{m} (\zeta - \zeta_j^+(x, t, \xi, p))$. Тут $\widetilde{A}^{(0)}$ — транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці $A^{(0)}$.

Зауважимо, що умови 1 і 2 є умовами (рівномірної) $2b$-параболічності за І. Г. Петровським [8, с. 100] системи (1) у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 3 говорить про те, що система крайових умов (2) накриває параболічну систему (1) на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

2. Простори узагальненої гладкості та уточнена шкала. Введемо функціональні простори, в яких вивчається параболічна задача (1)–(3). Властивості регулярності функцій/розподілів, що утворюють ці простори, характеризуються двома дійсними числовими параметрами і функціональним параметром. Останній пробігає нижчевказану множину $\mathcal{M}$.

За означенням, множина $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi \colon [1, \infty) \to (0, \infty)$, які задовольняють такі дві умови:

а) обидві функції φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ є повільно змінною за Карамата на нескінченності, тобто $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у монографії [15]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1} (\log \log r)^{\theta_2} \cdots (\underbrace{\log \cdots \log}_{k \text{ разів}} r)^{\theta_k} \qquad \text{при} \qquad r \gg 1,$$

де $k \in \mathbb{N}$ та $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ є довільними параметрами.

Нехай $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ та $\gamma := 1/(2b)$. За означенням, комплексний лінійний простір $H^{s, s\gamma, \varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ таких, що їх (повне) перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^{n+1}$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} r_\gamma^{2s}(\xi,\eta)\varphi^2(r_\gamma(\xi,\eta))|\widetilde{w}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} < \infty. \tag{6}$$

Тут і далі $r_\gamma(\xi,\eta) := (1+|\xi|^2+|\eta|^{2\gamma})^{1/2}$ для довільних $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}$. Цей простір наділений гільбертовою нормою (6). Він є окремим випадком гільбертових просторів узагальненої гладкості $\mathcal{B}_{2,\mu} = H^\mu$, введених та досліджених Л. Хермандером [6, п. 2.2] і Л. Р. Волевічем, Б. П. Панеяхом [7, § 2]. У нас $\mu(\xi,\eta) \equiv r_\gamma^s(\xi,\eta)\varphi(r_\gamma(\xi,\eta))$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) =: H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ стає анізотропним простором Соболєва порядку $(s, s\gamma)$. Для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ виконуються неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \qquad \text{за умови} \qquad s_0 < s < s_1.$$

Як бачимо, функціональний параметр φ задає додаткову регулярність розподілів стосовно основної (степеневої) регулярності, що задана парою чисел $(s, s\gamma)$. Так, якщо $\varphi(r) \to \infty$ (або $\varphi(r) \to 0$), коли $r \to \infty$, то простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ вужчий (відповідно, ширший) за соболєвський простір $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$. Коротко кажучи, параметр φ уточнює основну гладкість $(s, s\gamma)$.

З огляду на це клас гільбертових функціональних просторів

$$\{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})\colon s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\}$$

називаємо уточненою анізотропною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^{n+1}$; для неї γ є параметром анізотропії.

Використовуючи цю шкалу, введемо функціональні простори, в яких розглядаємо розв'язок задачі (1)–(3) та праві частини системи (1). Як і раніше, $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо

$$H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) := \{w \restriction \Omega\colon w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}), w(x_1,\ldots,x_n,t) \equiv 0 \text{ при } t<0\}, \tag{7}$$

$$\|u\|_{H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)} := \inf\{\|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})}\colon w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}), w(x,t) \equiv 0$$
$$\text{при } t<0, w = u \text{ в } \Omega\}, \qquad u \in H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega). \tag{8}$$

Лінійний простір $H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний відносно норми (8).

Простори, до яких належать праві частини g_j граничних умов (2), означимо на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0,\tau)$ циліндра Ω за допомогою локальних координат. Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$ означимо гільбертів простір $H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$ за формулами (7) і (8), замінивши у них Ω на Π і n на $n-1$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j\colon \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1,\ldots,\lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Крім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1,\ldots,\lambda$, такі, що $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum\limits_{j=1}^{\lambda}\chi_j \equiv 1$ на Γ.

За означенням, лінійний простір $H_+^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ складається з усіх розподілів $v \in \mathcal{D}'(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j \in \{1,\ldots,\lambda\}$ розподіл $v_j(x,t) :=$

$= \chi_j(\theta_j(x))v(\theta_j(x), t)$ аргументів $x \in \Gamma$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. У просторі $H_+^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ задана норма за формулою

$$\|v\|_{H_+^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|^2_{H_+^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} \right)^{1/2}.$$

Він є гільбертовим і сепарабельним відносно цієї норми та не залежить (з точністю до еквівалентності норм) від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці на Γ.

Якщо $\varphi \equiv 1$, то всі введені вище простори стають анізотропними просторами Соболєва. У цьому випадку опускаємо індекс φ у позначеннях просторів.

3. Основні результати. Запишемо систему (1) і граничні умови (2) у матричній формі — $Au = f$ і $Bu|_S = g$; тут і далі

$$A := (A_{j,k}(x, t, D_x, \partial_t))_{j,k=1}^N, \qquad B := (B_{j,k}(x, t, D_x, \partial_t))_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,N}} \;—$$

матричні диференціальні оператори, а u, f та g є комплекснозначні вектор-функції.

Пов'яжемо з початково-крайовою задачею (1)–(3) лінійне відображення

$$(C_+^\infty(\overline{\Omega}))^N \ni u \mapsto (Au, Bu) \in (C_+^\infty(\overline{\Omega}))^N \times (C_+^\infty(\overline{S}))^m. \tag{9}$$

Тут

$$C_+^\infty(\overline{\Omega}) := \{w \restriction \overline{\Omega} \colon w \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^n \times [0, \infty)\},$$
$$C_+^\infty(\overline{S}) := \{h \restriction \overline{S} \colon h \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subseteq \Gamma \times [0, \infty)\}.$$

Це відображення встановлює взаємно однозначну відповідність між просторами $(C_+^\infty(\overline{\Omega}))^N$ і $(C_+^\infty(\overline{\Omega}))^N \times (C_+^\infty(\overline{S}))^m$.

Позначимо через σ_0 найменше ціле число, яке задовольняє умови

$$\sigma_0 \geqslant 0, \qquad \sigma_0 \geqslant l_j + 1 \qquad \text{для всіх } j \in \{1, \dots, m\}, \qquad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Нехай довільно вибрані дійсне число $\sigma > \sigma_0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення (9) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$(A, B) : \mathcal{G}_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{N} H_+^{\sigma+2b\varkappa_k,(\sigma+2b\varkappa_k)/(2b),\varphi}(\Omega) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (H_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega))^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_+^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b),\varphi}(S) =: \mathcal{H}_+^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega, S). \tag{10}$$

Якщо $\varphi \equiv 1$, то ізоморфізм (10) діє у парах анізотропних просторів Соболєва. У цій ситуації теорема 1 встановлена В. О. Солонніковим [9, теорема 1.2] у припущенні, що $\sigma/(2b) \in \in \mathbb{Z}$. Його результат охоплює і граничний випадок $\sigma = \sigma_0$. З результату М. В. Житарашу і С. Д. Ейдельмана [11, теорема 5.7] випливає, що припущення $\sigma/(2b) \in \mathbb{Z}$ можна прибрати.

З теореми Солоннікова випливає, що кожному вектору $(f, g) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega, S)$ відповідає єдиний прообраз $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при відображенні (10). Цей прообраз називаємо (узагальненим) розв'язком параболічної задачі (1)–(3). Дослідимо його локальну регулярність в уточненій соболєвській шкалі.

Нехай U — відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^{n+1}$, $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\gamma_1 := U \cap \partial\Omega$, $\gamma_0 := U \cap S$. Введемо локальні аналоги просторів $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ і $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$, де $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma,\varphi}(\omega, \gamma_1)$ лінійний простір усіх розподілів $u \in D'(\Omega)$ в області Ω таких, що $\chi u \in H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \gamma_1$. Аналогічно, позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s\gamma,\varphi}(\gamma_0)$ лінійний простір усіх розподілів $v \in D'(S)$ на S таких, що $\chi v \in H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \gamma_0$.

Теорема 2. *Нехай вектор-функція $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є розв'язком задачі* (1)–(3)*. Припустимо, що для деяких параметрів $\sigma > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ праві частини цієї задачі задовольняють умови*

$$f_j \in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\omega, \gamma_1) \qquad \text{для всіх} \qquad j \in \{1, \ldots, N\},$$

$$g_j \in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma-l_j-1/2,(\sigma-l_j-1/2)/(2b),\varphi}(\gamma_0) \qquad \text{для всіх} \qquad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Тоді $u_k \in H_{+,\mathrm{loc}}^{\sigma+2b\varkappa_k,(\sigma+2b\kappa_k)/(2b),\varphi}(\omega, \gamma_1)$ для всіх $k \in \{1, \ldots, N\}$.

Якщо $\omega = \Omega$ і $\gamma_1 = \partial\Omega$ (тоді $\gamma_0 = S$), то за теоремою 2 регулярність розв'язку підвищується глобально, тобто в усьому циліндрі Ω аж до його межі. У випадку, коли $\gamma_1 = \varnothing$, ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Використання уточненої соболєвської шкали дозволяє отримати тонкі достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних (заданого порядку) розв'язку розглянутої задачі.

Теорема 3. *Нехай довільно вибрані цілі числа $q \geqslant 0$ та $k \in \{1, \ldots, N\}$. Припустимо, що вектор-функція $u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ є розв'язком задачі* (1)–(3)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$f_j \in H_{+,\mathrm{loc}}^{s-2b\varkappa_k,(s-2b\varkappa_k)/(2b),\varphi}(\omega, \gamma_1) \qquad \text{для всіх} \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{11}$$

$$g_j \in H_{+,\mathrm{loc}}^{s-2b\varkappa_k-l_j-1/2,(s-2b\varkappa_k-l_j-1/2)/(2b),\varphi}(\gamma_0) \qquad \text{для всіх} \qquad j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{12}$$

де $s := 2bq + b + n/2 > \sigma_0 + 2b\varkappa_k$, а функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ такий, що

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty.$$

Тоді компонента $u_k(x, t)$ розв'язку та її узагальнені частинні похідні $D_x^{\alpha}\partial_t^{\beta} u_k(x, t)$, для яких $|\alpha| + 2b\beta \leqslant 2bq$, всі є неперервними на множині $\omega \bigcup \gamma_1$.

Щодо цієї теореми зауважимо, що якщо сформулювати її аналог для соболєвської шкали (випадок $\varphi \equiv 1$), то доведеться замінити умову теореми на більш сильну: для правих частин задачі виконуються включення (11) і (12) для деякого числа $s > 2bq + b + n/2$. Це робить результат суттєво більш грубим.

4. Обгрунтування результатів. Теорема 1 виводиться з теореми Солоннікова [9, теорема 1.2] методом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, зокрема, анізотропних просторів Соболєва. Означення і властивості такої інтерполяції наведені, наприклад, у монографії [4, пп. 1.1, 2.4.2].

Опишемо коротко доведення теореми 1. Виберемо число $\sigma_1 > \sigma$ таке, що $\sigma_1/(2b) \in \mathbb{Z}$. На підставі згаданої теореми Солоннікова маємо ізоморфізми (10), де $\varphi \equiv 1$ і $\sigma \in \{\sigma_0, \sigma_1\}$. Означимо інтерполяційний функціональний параметр ψ за формулами $\psi(r) := r^{(\sigma-\sigma_0)/(\sigma_1-\sigma_0)}\varphi(r^{1/(\sigma_1-\sigma_0)})$ для $r \geqslant 1$ та $\psi(r) := \varphi(1)$ для $0 < r < 1$. Застосувавши інтерполяцію з параметром ψ до просторів, у яких діють ці ізоморфізми, отримаємо ще один ізоморфізм

$$(A,B)\colon \bigoplus_{k=1}^{N}[H_{+}^{\sigma_0+2b\varkappa_k,(\sigma_0+2b\varkappa_k)/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1+2b\varkappa_k,(\sigma_1+2b\varkappa_k)/(2b)}(\Omega)]_{\psi} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow ([H_{+}^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), H_{+}^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)]_{\psi})^{N} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{m}[H_{+}^{\sigma_0-l_j-1/2,(\sigma_0-l_j-1/2)/(2b)}(S), H_{+}^{\sigma_1-l_j-1/2,(\sigma_1-l_j-1/2)/(2b)}(S)]_{\psi}.$$

Тут вираз $[E_1, E_2]_{\psi}$ означає гільбертів простір, що утворився в результаті інтерполяції з параметром ψ пари гільбертових просторів E_1 та E_2.

Для завершення доведення теореми 1 залишається показати, що інтерполяційні простори, у яких діє останній ізоморфізм, збігаються (з точністю до еквівалентності норм) з відповідними просторами, записаними у формулі (10). Базова рівність

$$[H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\mathbb{R}^{n+1}), H^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\mathbb{R}^{n+1})]_{\psi} = H^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$$

безпосередньо перевіряється на підставі означення інтерполяції. Звідси виводяться необхідні інтерполяційні формули за допомогою загальних методів інтерполяції просторів, заданих у евклідових областях та на многовидах (див., наприклад, [4, пп. 2.1.2, 3.2]). У випадку, коли Ω є прямокутником, відповідні доведення наведені в [13, п. 5].

Теорема 2 у випадку глобальної регулярності, тобто коли $\omega = \Omega$ і $\gamma_1 = \partial\Omega$, є прямим наслідком теореми 1. У загальній ситуації вона зводиться до цього випадку за допомогою таких міркувань. Виберемо довільно функцію $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subseteq \omega \cup \gamma_1$. Переставивши місцями диференціальний оператор (A,B) і оператор множення на функцію χ, запишемо рівність $(A,B)(\chi u) = \chi(f,g)+(A',B')u$, де A' і B' — деякі матричні диференціальні оператори, усі елементи яких мають нижчі порядки, ніж відповідні елементи матричних операторів A і B. Тому, за умовою теореми,

$$(A,B)(\chi u) \in \mathcal{H}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega,S) + \mathcal{H}_{+}^{\sigma_0+1,(\sigma_0+1)/(2b)}(\Omega,S).$$

Тепер, якщо $\sigma < \sigma_0+1$, то остання (алгебраїчна) сума дорівнює першому її доданку і тому $\chi u \in \mathcal{G}_{+}^{\sigma,\sigma/(2b),\varphi}(\Omega)$, звідки отримаємо висновок з теореми 2 з огляду на довільність вказаного вибору функції χ. Загальний випадок, коли $\sigma_0 + r - 1 \leqslant \sigma < \sigma_0 + r$ для деякого номера $r \geqslant 1$, доводиться за допомогою аналогічних міркувань індукцією за r.

Теорема 3 випливає з теореми 2, за якою $u_k \in H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega,\gamma_1)$, та деякої версії теореми вкладання Л. Хермандера [6, теорема 2.2.7]. Згідно з цією версією, будь-яка функція $u_k \in H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega,\gamma_1)$, де параметри s і φ задовольняють умову теореми 3, має властивості гладкості, сформульовані у висновку з цієї теореми.

Автор висловлює вдячність О. О. Мурачу за обговорення результатів та допомогу у підготовці роботи до друку.

1. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin: Wiley-VCH, 2000. – 348 p.
2. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – 425 p.
3. *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – 306 p.
4. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.).
5. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No 2. – P. 211–281.
6. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. пер.: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.).
7. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
8. *Петровский И. Г.* Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. – Москва: Наука, 1986. – 504 с.
9. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Тр. Мат ин-та АН СССР. – 1967. – **102**. – С. 137–160.
10. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.
11. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.
12. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат ин-та АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3–163.
13. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. Topol. – 2013. – **19**, No 2. – P. 146–160.
14. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23–31.
15. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"
Чернігівський національний технологічний університет

Надійшло до редакції 25.04.2014

В. Н. Лось

Параболические смешанные задачи для систем Петровского в пространствах обобщенной гладкости

Для некоторых классов гильбертовых пространств обобщенной гладкости установлена теорема о корректной разрешимости параболических смешанных задач для систем Петровского с однородными начальными данными Коши. Регулярность функций, образующих эти пространства, характеризуется парой числовых параметров и функциональным параметром, медленно меняющимся на бесконечности по Карамата. Установлена теорема о локальном повышении регулярности решения задачи. Получены новые достаточные условия непрерывности обобщенных производных (заданного порядка) решения.

V. N. Los

Parabolic mixed problems for Petrovskii systems in spaces of generalized smoothness

For some classes of Hilbert spaces of generalized smoothness, we prove a theorem on the well-posedness of parabolic initial-boundary-value problems for Petrovskii systems with zero Cauchy data. The regularity of functions that form these spaces is characterized by a couple of number parameters and a functional parameter. The latter varies regularly at infinity in Karamata's sense. We prove a theorem on a local increase in the regularity of solutions to the problem. We obtain new sufficient conditions, under which the generalized derivatives (of a prescribed order) of the solutions should be continuous.