УДК 531.36

Н. В. Никитина

О близких к синхронным движениях заряженной частицы в электромагнитной волне

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Приводятся условия существования близких к синхронным движений заряженной частицы в электромагнитной волне. Рассмотрен эффект образования сгустка ионизированной плазмы

Рассматривается электродинамическая задача, которая связана с общей задачей синхронизации динамических систем [1], а именно, движение заряженной частицы в стоячей электромагнитной волне. В обзоре, посвященном шаровым молниям (ШМ) [2], большое внимание уделено исследованиям П. Л. Капицы [3]. Приведем постановку задачи, согласно [2–4], о движении заряженной частицы в стоячей электромагнитной волне. Перечислим три основные предположения рабочей гипотезы [3].

1. Во время свечения к ШМ непрерывно подводится энергия. Известно, что поглощение электромагнитной энергии колебаний происходит при резонансе, когда собственный период электромагнитных колебаний плазмы совпадает с периодом поглощения излучения.

2. Возможно, единственный способ подвода энергии — это поглощение приходящих извне интенсивных радиоволн. Источником радиоволн является колебательный процесс, происходящий в ионизированной атмосфере.

3. Местами, наиболее благоприятными для образования ШМ, будут те области, где радиоволны достигают наибольшей интенсивности. Поглощение электромагнитных колебаний ионным газом может происходить только в определенных поверхностях, параллельных земле. Этот процесс кратковременный.

В данной работе показано, что при определенном уровне диссипации система входит в состояние, близкое к синхронизму, и именно это состояние характерно для возникновения ШМ. Таким образом, в простейшей модели ШМ можно установить критерий синхронизма и объяснить механизм образования этого явления.

Постановка задачи. Простейшая модель. Сила, с которой электромагнитное поле действует на частицу, является силой Лоренца

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right),$$

где q — заряд частицы; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; $\mathbf{v}$ — скорость частицы; c — скорость света [4]. В системе координат $OXYZ$ проекции векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ имеют вид

$$E_X = 0, \qquad E_Y = E_0 \cos\omega t \sin kX, \qquad E_Z = 0,$$

$$B_X = 0, \qquad B_Y = 0, \qquad B_Z = -\frac{E_0}{c}\sin\omega t \cos kX,$$

© Н. В. Никитина, 2014

где ω — частота колебаний; k — волновое число. Фазы электрических и магнитных полей смещены во времени на $\pi/2$, поэтому энергия в среднем за период равна нулю, что характерно для стоячей волны.

Уравнения движения частицы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\ddot{X} + \frac{H}{M}\dot{X} + \frac{qE_0}{cM}\dot{Y}\sin\omega t\cos kX = 0,\\
&\ddot{Y} + \frac{H}{M}\dot{Y} - \frac{qE_0}{M}\cos\omega t\sin kX - \frac{qE_0}{cM}\dot{X}\cos\omega t\sin kX = 0,\\
&\ddot{Z} + \frac{H}{M}\dot{Z} = 0,
\end{aligned}$$

где H — коэффициент сопротивления; M — масса частицы. Заметим, что координата Z не входит в первые два уравнения.

Перейдем к безразмерным переменным $x = kX$, $y = kY$, $\tau = \omega t$, введем новую переменную $z = \dot{y}$. Учитывая, что $\omega/k = c$, уравнения движения частицы в безразмерном виде запишутся так:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\tau} - y = 0, \qquad \frac{dy}{d\tau} + hy + Az\cos x\sin\tau = 0,\\
&\frac{dz}{d\tau} + hz - A\sin x\cos\tau - Ay\cos x\sin\tau = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $h = H/(M\omega)$, $A = qE_0/(cM\omega)$. Так как в уравнения (1) включена сила сопротивления, волна будет перемещаться параллельно плоскости xy в сторону устойчивой особой точки. Уравнения (1) можно рассматривать в качестве абстрактной трехмерной модели, которая описывает также движение заряженной частицы в электромагнитной волне.

Приведем систему (1) к виду автономной системы

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{d\tau} = v, \qquad \frac{dv}{d\tau} = -u,\\
&\frac{dx}{d\tau} = y, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -hy + Avz\cos x, \qquad \frac{dz}{d\tau} = -hz + Au\sin x - Avy\cos x,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$u = \cos\tau, \qquad v = -\sin\tau, \qquad u(0) = 1, \qquad v(0) = 0. \tag{3}$$

Введем малое отклонение δu, δv, δx, δy, δz в системе (2) от частных решений $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ и составим уравнения в вариациях [5]

$$\begin{aligned}
&\frac{d\delta u}{d\tau} - \delta v = 0, \qquad \frac{d\delta v}{d\tau} - \delta u = 0,\\
&\frac{d\delta x}{d\tau} - \delta y = 0, \qquad \frac{d\delta y}{d\tau} + h\delta y - A\overline{z}\cos\overline{x}\delta v + A\overline{v}\overline{z}\sin\overline{x}\delta x - A\overline{v}\cos\overline{x}\delta z = 0,\\
&\frac{d\delta z}{d\tau} + h\delta z - A\sin\overline{x}\delta u + A\overline{y}\cos\overline{x}\delta v - A\overline{u}\cos\overline{x}\delta x - A\overline{v}\overline{y}\sin\overline{x}\delta x + A\overline{v}\cos\overline{x}\delta y = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Характеристическое уравнение системы (4) имеет вид

$$(\lambda^2+1)(\lambda^3+2\lambda^2 h+\lambda(h^2+A^2\overline{v}^2\cos^2\overline{x}+A\overline{v}\overline{z}\sin\overline{x})-A^2\overline{v}\overline{u}\cos^2\overline{x}-$$
$$-A^2\overline{v}^2\overline{y}\sin\overline{x}\cos\overline{x}+Ah\overline{v}\overline{z}\sin\overline{x})=0. \qquad (5)$$

Корни характеристического уравнения (5) разделяются. Имеют место два уравнения

$$\lambda^2+1=0,$$
$$\lambda^3+2\lambda^2 h+\lambda(h^2+A^2\overline{v}^2\cos^2\overline{x}+A\overline{v}\overline{z}\sin\overline{x})-A^2\overline{v}\overline{u}\cos^2\overline{x}-A^2\overline{v}^2\overline{y}\sin\overline{x}\cos\overline{x}+ \qquad (6)$$
$$+Ah\overline{v}\overline{z}\sin\overline{x}=0,$$

где $\overline{u}$, $\overline{v}$ определяются решением (3). Два корня уравнения имеют вид $\lambda_{1,2}=\pm i$ и соответствуют первым двум уравнениям системы (4), остальные находятся из второго уравнения (6).

Разделение корней характеристического уравнения (5) является предпосылкой того, что частица может совершать движение в состоянии, близком к синхронизации. Вид характеристического уравнения (5) аналогичен виду характеристического уравнения при периодическом воздействии на нелинейный осциллятор, который порождает предельный цикл [5]. Множитель (λ^2+1) в характеристическом уравнении диссипативной системы (5) можно рассматривать как внешний сигнал, что указывает на возможность возникновения движений близких, к синхронизации системы (1). Это качество при определенном значении параметров превратит траектории движения частиц в сгусток ионизированной плазмы.

Введем предположение о малости коэффициента A. Тогда на основе анализа характеристических показателей (ХП) точек траектории системы (1) можно установить порядок второго коэффициента h системы (1), который вызывает движение, близкое к синхронизированному. Качество ХП точек траектории должно ввести систему (1) в состояние, близкое к синхронизму. Процесс возникает на конечном отрезке времени.

Консервативная система. Движение частицы в стоячей электромагнитной волне определяется уравнениями

$$\frac{du}{d\tau}=v,\quad \frac{dv}{d\tau}=-u,\quad \frac{dx}{d\tau}=y,\quad \frac{dy}{d\tau}=Avz\cos x,\quad \frac{dz}{d\tau}=Au\sin x-Avy\cos x. \qquad (7)$$

Особая точка $O(u=0,v=0,x=0,y=0,z=0)$ имеет такие ХП: $\lambda_{1,2}=\pm i$, $\lambda_3=\lambda_4=$ $=\lambda_5=0$. Покажем, что из трех нулевых корней два корня кратные. Характеристическая матрица линейной системы (7) распадается на три. Одна из них, соответствующая третьему и четвертому уравнениям системы (7), имеет вид

$$\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}. \qquad (8)$$

При помощи элементарных преобразований характеристическая матрица (8) приводится к виду

$$\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Корни $\lambda_3=0$, $\lambda_4=0$ являются кратными.

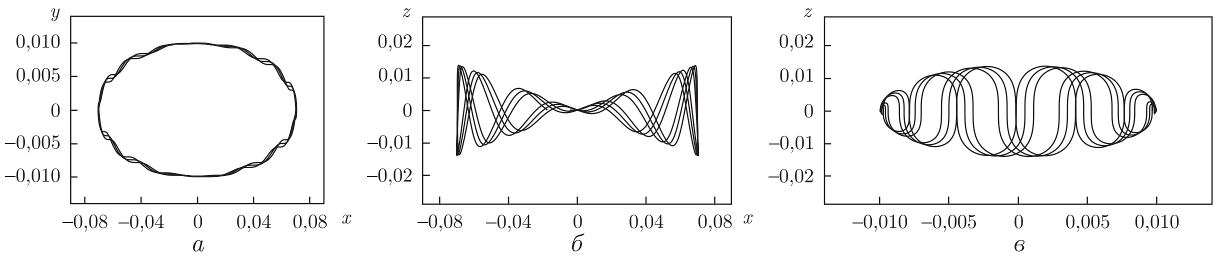

Рис. 1

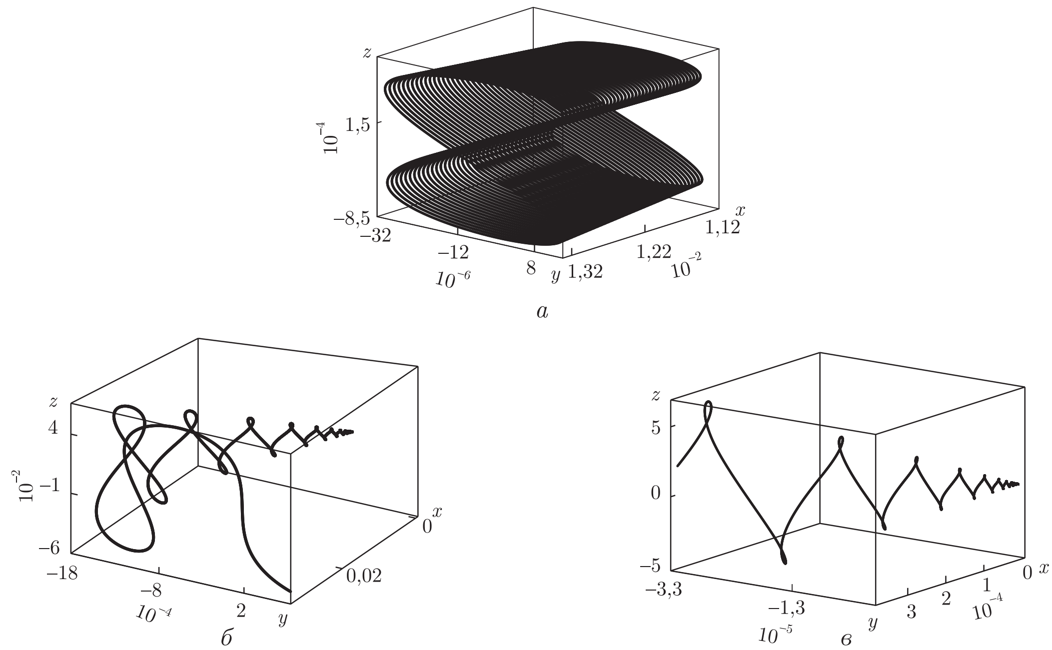

Рис. 2

Рассмотрим характеристическое уравнение системы в вариациях (5) при $h = 0$. Для определения $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ применим численное решение системы (7). ХП уравнения (5) разделяются на две группы: периодические $\lambda_{1,2} = \pm i$ и седлофокусные $\lambda_3 < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{4,5} > 0$. Седловая величина при этом $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$ для всех точек траектории.

Траектория не замыкается и не уходит, а бесконечно наматывается на орбиту (рис. 1, *а*, *б*, *в*, начальные возмущения лишь $y(0) = 0{,}01$).

Система с диссипацией. Разделение ХП в характеристическом уравнении (5) позволяет предсказать существование почти синхронного режима колебаний при $h \neq 0$ с частотой, равной единице (период колебаний $T = 2\pi$). На рис. 2, *а* приведено пространственное изображение синхронизированных колебаний при $h = 3$; $A = 0{,}2$; $x(0) = y(0) = 0{,}01$ на отрезке $\tau \in (5, T \cdot 40)$, где $T = 2\pi$. Синхронизация происходит на конечном промежутке времени, т. е. имеет место переходный процесс, который включает почти синхронизированные колебания. Траектория на отрезке $\tau \in (5, T \cdot 40)$ имеет следующие ХП: $\lambda_{1,2} = \pm i$ и узел-фокусные $\lambda_3 > 0$, $|\lambda_3| \ll 1$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{4,5} < 0$, $|\mathrm{Re}\,\lambda_{4,5}| \gg 1$, так, что $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 0$, $|\sigma| \gg 1$. Эффект образования сгустка ионизированной плазмы происходит благодаря сильному притяжению витков ($\mathrm{Re}\,\lambda_{4,5} < 0$, $|\mathrm{Re}\,\lambda_{4,5}| \gg 1$; $|\sigma| \gg 1$).

При уменьшении диссипации ($h = 0,3$) траектории заряженных частиц не представляют собой сгусток ионизированной плазмы. На рис. 2, *б* приведено движение при $h = 0{,}3$; $A = 0{,}2$; $x(0) = y(0) = 0{,}01$ на отрезке $\tau \in (5, T \cdot 40)$, где $T = 2\pi$, на рис. 2, *в* — движение при $h = 0{,}3$; $A = 0{,}2$; $x(0) = y(0) = 0{,}01$ на отрезке $\tau \in (60, T \cdot 40)$. Траектория имеет следующие ХП: $\lambda_{1,2} = \pm i$ и узел-фокусные $\lambda_3 > 0$, $|\lambda_3| \ll 1$, $\operatorname{Re}\lambda_{4,5} < 0$, $|\operatorname{Re}\lambda_{4,5}| < 1$, так, что $\sigma = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 0$, $|\sigma| < 1$. В этом случае слабое притяжение в точках траектории не вызывает движение, близкое к синхронному, с частотой, равной $\omega = 1$.

Отметим некоторые особенности качественного анализа движения заряженной частицы в электромагнитной волне.

1. Характеристическое уравнение (5), которое включает частные решения системы (2), позволяет указать ХП любой точки на траектории движения частицы и рассмотреть механизм образования процесса синхронизации.

2. Множитель $(\lambda^2 + 1)$ в характеристическом уравнении диссипативной системы (5) указывает на возможность синхронизации системы (1) с частотой $\omega = 1$.

3. В диссипативной модели ШМ поиск синхронного режима связан с нахождением значения параметра h, при котором движение двух объектов объединены в единую систему. Численное значение параметра h в движении, близком к синхронизации, на порядок выше значения параметра A.

1. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. – Москва: Наука, 1971. – 894 с.
2. *Сигнер С.* Природа шаровой молнии. – Москва: Мир, 1973. – 267 с.
3. *Капица П. Л.* О природе шаровой молнии // Докл. АН СССР. – 1955. – **101**, № 2. – С. 245–248.
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1965. – 702 с.
5. *Никитина Н. В.* Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – Киев: Феникс, 2012. – 235 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 29.05.2014

Н. В. Нікітіна

Про рух, близький до синхронного зарядженої частинки в електромагнітной хвилі

Встановлено умови існування близьких до синхронних рухів зарядженої частинки в електромагнітній хвилі. Розглянуто ефект утворення згустка іонізованої плазми.

N. V. Nikitina

About the motions close to synchronous ones of a charged particle in an electromagnetic wave

The conditions of existence of the motions close to synchronous ones of a charged particle in an electromagnetic wave are presented. The effect of formation of a cluster of the ionized plasma is considered.