УДК 537.533.2;539.182

Член-кореспондент НАН України **В. І. Мирошніченко,**
С. О. Лебединський

Квантово-механічний рух електрона в схрещених однорідних електричному та магнітному полях

Розв'язується квантово-механічна задача про рух електрона в зовнішніх однорідних схрещених електричному та магнітному полях. Шляхом розв'язання рівняння Шредінгера знайдено вираз для хвильової функції електрона, що рухається в такій суперпозиції електромагнітних полів. Частина хвильової функції електрона, що описує його рух у площині, перпендикулярній до напрямку магнітного поля, виражається через відомі функції Ерміта. У напрямку магнітного поля електрон здійснює вільний рух. Крім того, в схрещених електричному та магнітному полях виникає дрейфовий рух електрона вздовж осі, нормальній до площини, утвореної векторами електричного та магнітного полів. Знайдено спектр можливих значень енергії електрона, який складається з чотирьох частин: квантованого спектра енергій у площині, перпендикулярній до магнітного поля, неперервного спектра енергій вздовж магнітного поля, енергії дрейфового руху, що визначається напруженостями електричного та магнітного полів, та потенціальної енергії електрона в зовнішньому електричному полі.

У ряді робіт [1–8], присвячених дослідженню впливу зовнішнього магнітного поля на густину струму польової емісії електронів із поверхні металів або напівпровідників, припускалось ad hoc, що один із найважливіших факторів при розв'язанні цієї задачі — коефіцієнт проходження електроном металу чи напівпровідника потенціального бар'єра на межі останніх, не залежить від величини зовнішнього магнітного поля в розглянутому авторами цих робіт випадку колінеарності електричного та магнітного полів. У роботі [9] доведено строго, що це припущення дійсно має місце, але тільки для розглянутого випадку колінеарності зовнішніх електричного та магнітного полів.

У зв'язку з цим постає питання про вплив зовнішнього магнітного поля на густину струму польової емісії електронів у більш загальному випадку, коли вектори напруженості електричного та магнітного полів неколінеарні. Ця ситуація має місце в більшості проведених експериментів. Найпростішим із цих випадків є випадок схрещених електричного та магнітного полів, коли кут між векторами напруженості електричного та магнітного полів становить 90°. Вирішення цього питання приводить нас до необхідності попереднього розгляду квантово-механічного руху електрона в такій конфігурації електричного та магнітного полів.

Першим кроком до розв'язання цієї задачі є розгляд квантово-механічного руху вільного електрона у вищезгаданій конфігурації електричного та магнітного полів, коли ці поля однорідні.

Вихідним рівнянням для розв'язання цієї задачі є рівняння для хвильової функції електрона

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \widehat{H}\Psi(\vec{r},t), \tag{1}$$

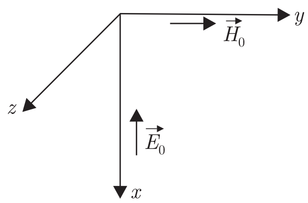

Рис. 1

де оператор Гамільтона $\widehat{H}$ при русі електрона в таких полях має відомий вигляд [10]

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\widehat{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + U(\vec{r}) \tag{2}$$

і де введені такі позначення: $\widehat{p} = \left(-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ — оператор імпульсу електрона; $\vec{A}$ — векторний потенціал магнітного поля; $U(\vec{r})$ — потенціальна енергія електрона в такому полі; $\hbar$ — постійна Планка; $-e$– заряд електрона; m — маса електрона; c — швидкість світла у вакуумі.

Для розв'язання задачі виберемо декартову систему координат, що зображена на рис. 1, та відповідні напрямки векторів напруженості електричного $\overrightarrow{E_0}$ та магнітного $\overrightarrow{H_0}$ полів, а також вигляд векторного потенціалу магнітного поля $\vec{A}$, який визначається з точністю до градієнта довільної скалярної функції:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{E_0} = (-E_0, 0, 0),\\ &\overrightarrow{H_0} = (0, H_0, 0),\\ &\overrightarrow{A} = (0, 0, -H_0 x), \qquad U(\vec{r}) = -eE_0 x. \end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки оператор Гамільтона у розглядуваній задачі не залежить від часу t, шукаємо стаціонарний розв'язок рівняння (1) для хвильової функції $\Psi(\vec{r}, t)$ у вигляді

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}t\right)\Psi(\vec{r}), \tag{4}$$

де ε — енергія електрона, що рухається в даній конфігурації полів (3).

Після підстановки (4) в (1) отримуємо таке диференціальне рівняння в частинних похідних для хвильової функції електрона, яка залежить від просторових координат:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z} - \frac{eH_0}{c}x\right)^2\right] - eE_0 x\right\}\Psi = \varepsilon\Psi. \tag{5}$$

Як видно з (5), у явний вигляд оператора Гамільтона не входять координати y, z, тобто ми маємо ситуацію, коли оператори компонент імпульсу $\widehat{p_y}$ та $\widehat{p_z}$ комутують з оператором Гамільтона:

$$\{\widehat{H}, \widehat{p_y}\} \equiv \widehat{H}\widehat{p_y} - \widehat{p_y}\widehat{H} = 0, \qquad \{\widehat{H}, \widehat{p_z}\} \equiv \widehat{H}\widehat{p_z} - \widehat{p_z}\widehat{H} = 0. \tag{6}$$

Зважаючи на співвідношення (6), приходимо до висновку, що компоненти імпульсу p_y, p_z є інтегралами руху і хвильову функцію електрона шукаємо у вигляді

$$\overline{\Psi}(x, y, z) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)\right]X(x), \tag{7}$$

де $X(x)$ — складова хвильової функції електрона, що описує рух електрона вздовж напрямку електричного поля.

Підставляючи хвильову функцію Ψ у вигляді (7), отримуємо диференціальне рівняння для функції $X(x)$:

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}+{p_y}^2+\left(p_z-\frac{eH_0}{c}x\right)^2\right]-eE_0x\right\}X(x)=\varepsilon X(x). \tag{8}$$

Шляхом алгебраїчних перетворень та введення безрозмірної координати $\xi{\sim}x$ рівняння (8) може бути записане у вигляді

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}+\{\lambda-\xi^2\}X(x)=0, \tag{9}$$

де введені позначення величин з таким фізичним змістом: $x-x_0=a\xi$, $x_0=1/(m\omega_H)\times$ $\times\,(p_z+eE_0/\omega_H)$ — x-координата центра кола обертання електрона при класичному описі; $a=\sqrt{\hbar/(m\omega_H)}$ — одиниця масштабу вздовж осі x; $\omega_H=eH_0/(mc)$ — ларморівська частота обертання електрона в магнітному полі; $\lambda=\dfrac{2}{\hbar\omega_H}\left(\varepsilon-\dfrac{{p_y}^2}{2m}-\dfrac{{p_z}^2}{2m}+\dfrac{m{\omega_H}^2{x_0}^2}{2}\right)$ — параметр диференціального рівняння (9).

Рівняння (9) являє собою відоме рівняння для функцій Ерміта [11] і має обмежений розв'язок при таких значеннях параметра λ:

$$x=(2n+1),\qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{10}$$

Використовуючи (9) та (10), отримуємо спектр можливих значень енергії електрона, що рухається в схрещених однорідних електричному та магнітному полях:

$$\varepsilon_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_H+\frac{{p_y}^2}{2m}+\frac{{p_z}^2}{2m}-\frac{m{\omega_H}^2{x_0}^2}{2}. \tag{11}$$

З метою фізичної інтерпретації спектра можливих значень енергії електрона в розглянутому випадку надамо (11) іншого вигляду, підставляючи в нього явний вираз для x_0.

Після простих алгебраїчних перетворень отримуємо

$$\varepsilon_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_H+\frac{{p_y}^2}{2m}+\frac{m{\upsilon_d}^2}{2}-eE_0x_0, \tag{12}$$

де $\upsilon_d=cE_0/H_0$ — швидкість дрейфового руху центра кола обертання електрона при класичному описі його руху.

Маючи вираз (12) для спектра енергії електрона, що рухається в схрещених однорідних електричному та магнітному полях, маємо таку фізичну інтерпретацію окремих доданків виразу (12): $(n+1/2)\hbar\omega_H$ — дискретний спектр значень енергії електрона, пов'язаний з поперечним до напрямку магнітного поля рухом електрона; ${p_y}^2/(2m)$ — неперервний ряд значень енергії електрона, пов'язаний з поздовжнім вздовж магнітного поля рухом електрона; $m{\upsilon_d}^2/2$ — енергія електрона, пов'язана з дрейфом його класичного центра кола обертання з дрейфовою швидкістю, що визначається значеннями зовнішнього електричного та магнітного полів; $-eE_0x_0$ — потенціальна енергія електрона, що рухається в постійному однорідному електричному полі і визначається координатою центра кола ларморівського обертання електрона в магнітному полі.

Умовою справедливості отриманої формули для енергетичного спектра електрона, що рухається в схрещених однорідних електричному та магнітному полях, є область нерелятивіського руху електрона, яка накладає обмеження на співвідношення між напруженостями електричного та магнітного полів у вигляді нерівності

$$\upsilon_d \ll c \Rightarrow E_0 \ll H_0. \tag{13}$$

Наведемо кінцевий результат знайденого вигляду хвильової функції електрона при його русі в схрещених однорідних електричному та магнітному полях:

$$\Psi_n(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi) \exp\left[\frac{i(p_y y + p_z z - \varepsilon t)}{\hbar}\right], \tag{14}$$

де $H_n(\xi)$ — поліном Ерміта n-го порядку; $\xi = \left(\dfrac{m\omega_H}{\hbar}\right)^{1/2}\left[x - \dfrac{p_z\omega_H + eE_0}{m\omega_H{}^2}\right]$.

Отримані формули (13)–(14) узагальнюють результат Л. Д. Ландау [10] відносно характеристики квантово-механічного руху електрона на випадок, коли крім постійного однорідного магнітного поля присутнє постійне однорідне електричне поле, та переходять в результати [10] при відсутності останнього.

Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень, яка здійснювалась Державним агенством з питань науки, інновацій та інформатизації України, договір № Ф58/383-2013.

1. *Blatt F. J.* Field emission in a magnetic field // Phys. Review. – 1963. – **131**. – P. 166–169.
2. *Waites R. F., Schwetman H. A.* Field emission from bismuth and tungsten in a magnetic field // Phys. Review B. – 1973. – **8**. – P. 2420–2425.
3. *Kennedy P. J., Muir A. Y.* Modification of field-emission currents from tungsten by external magnetic fields // Solid State Communication. – 1978. – **27**. – P. 279–281.
4. *Flood D. J.* Field emission in hight magnetic fields // J. Phys. Chem. Solids. – 1970. – **31**. – P. 1649–1650.
5. *Гогадзе Г. А., Ицкович Ф. И., Кулик И. О.* Квантовые осцилляции тока холодной эмиссии металлов в магнитном поле // ЖЭТФ. – 1964. – **46**. – С. 913–919.
6. *Бурибаев И., Шишкин В. В.* Автоэлектронная эмиссия вольфрама в магнитном поле // Физика тв. тела. – 1970. – **12**. – P. 3309–3311.
7. *Фурсей Г. Н., Птицын В. Э., Егоров Н. В.* Влияние магнитного поля на процесс автоэлектронной эмиссии из W // Письма в ЖТФ. – 1979. – **5**. – P. 1161–1164.
8. *Птицын В. Э., Фурсей Г. Н., Егоров Н. В.* Аномалии процесса автоэлектронной эмиссии в магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. – 1980. – **31**. – P. 733–737.
9. *Мирошніченко В. І., Лебединський С. О.* Квантово-механічний рух електрона в паралельних магнітному та електричному полях // Доп. НАН України. – 2014. – № 9. – С. 61–65.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика в 10 т. Т. 3. – Москва: Наука, 1969. – 767 с.
11. *Смирнов В. I.* Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. – Москва: Наука, 1974. – 672 с.

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми
Надійшло до редакції 07.07.2014

Член-корреспондент НАН Украины **В. И. Мирошниченко, С. А. Лебединский**

Квантово-механическое движение электрона в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях

Решается квантово-механическая задача о движении электрона во внешних однородных скрещенных электрическом и магнитном полях. Путем решения уравнения Шредингера найдено выражение для волновой функции электрона, который движется в такой суперпозиции электромагнитных полей. Часть волновой функции электрона, которая описывает его движение в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля, выражается через известные функции Эрмита. В направлении магнитного поля электрон совершает свободное движение. Кроме того, в скрещенных электрическом и магнитном полях возникает дрейфовое движение электрона вдоль оси, нормальной к плоскости, образованной векторами электрического и магнитного полей. Найден спектр возможных значений энергии электрона, который состоит из четырех слагаемых: квантованного спектра энергий движения в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, непрерывного спектра энергий вдоль магнитного поля, энергии дрейфового движения, которая определяется напряженностями электрического и магнитного полей, а также потенциальной энергии электрона во внешнем электрическом поле.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. I. Miroshnichenko, S. O. Lebedynskyi**

The quantum-mechanical movement of an electron in crossed uniform electric and magnetic fields

The quantum-mechanical task on the electron movement in external crossed electric and magnetic fields is considered. The solution of the Schrödinger equation has been found for the electron wave function in such electromagnetic field configuration. A part of the electron wave function describing the electron movement in a plane normal to the magnetic field is expressed by the well-known Hermite function. The electron moves as a free particle along the magnetic field. The electron drift movement along the axis normal to the plane formed by the electric and magnetic field vectors arises in the crossed electric and magnetic fields. The possible electron energy spectrum has been found. It consists of four parts, namely: a quantified electron energy spectrum related to the electron movement energy in the plane normal to the magnetic field direction; the electron movement energy along the magnetic field; the energy of the electron drift movement defined by the electric and magnetic field strengths; and the potential energy of an electron in the external electric field.