УДК 514.177.2,514.772.24,517.977.5

К. Д. Драч

Об изопериметрическом свойстве λ-выпуклых луночек на плоскости Лобачевского

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Приведена точная нижняя оценка площади области, которую может ограничивать замкнутая вложенная λ-выпуклая кривая заданной длины, лежащая на плоскости Лобачевского.

Во всех двумерных пространствах постоянной кривизны справедливо так называемое изопериметрическое свойство окружности: среди всех простых замкнутых кривых фиксированной длины наибольшую площадь ограничивает только окружность (см. [1]). Соответствующее изопериметрическое неравенство дает точную верхнюю оценку площади области, ограничиваемой кривой данной длины. При этом, вообще говоря, кривая может ограничивать площадь, сколь угодно близкую к нулю.

Естественным сужением класса рассматриваемых кривых, позволяющим получить неравенства другого рода, является класс кривых ограниченной кривизны. Такой класс возникает во многих экстремальных задачах (см., например, [2–6]). Так, в [2] для замкнутых вложенных λ-выпуклых кривых на евклидовой плоскости было доказано неравенство, дающее оценку снизу на ограничиваемую ими площадь при заданной длине. Аналогичное неравенство на сфере было получено в [3]. В настоящей работе эти результаты обобщаются на случай кривых, лежащих на двумерной плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2(-k^2)$ гауссовой кривизны, равной $-k^2$.

Напомним, что локально выпуклая кривая $\gamma \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$ называется *λ-выпуклой*, $\lambda > 0$, если в каждой точке $P \in \gamma$ существует кривая постоянной геодезической кривизны, равной λ, такая, что в окрестности P кривая γ лежит со стороны выпуклости этой кривой.

Как известно, на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2(-k^2)$ есть три типа кривых постоянной геодезической кривизны, равной λ: окружность (при $\lambda > k$), орицикл (при $\lambda = k$) и эквидистанта (при $k > \lambda > 0$).

Заметим, что для $r \geqslant 2$ в регулярных класса C^r точках кривой γ условие ее λ-выпуклости равносильно тому, что в этих точках геодезическая кривизна кривой $k_{\mathrm{g}} \geqslant \lambda$. Таким образом, понятие λ-выпуклости есть естественным обобщением того факта, что геодезическая кривизна не меньше λ. Так как выпуклая кривая почти всюду дважды непрерывно дифференцируема, то в общем случае она будет λ-выпуклой тогда и только тогда, когда почти всюду $k_{\mathrm{g}} \geqslant \lambda$.

λ-выпуклым многоугольником назовем замкнутую вложенную λ-выпуклую кривую, состоящую из объединения дуг кривых геодезической кривизны, равной λ. Как известно, таких дуг может быть не более чем счетное число.

λ-выпуклые многоугольники, составленные из двух дуг кривых кривизны, равной λ, мы будем называть λ-выпуклыми *луночками.*

Для произвольной замкнутой вложенной λ-выпуклой кривой γ обозначим через $L(\gamma)$ и $A(\gamma)$ ее длину и площадь выпуклой области, которую она ограничивает.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\gamma \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$ — замкнутая вложенная λ-выпуклая кривая, лежащая на двумерной плоскости Лобачевского постоянной гауссовой кривизны, равной $-k^2$.*

1. Если $\lambda > k$, то

$$A(\gamma) \geqslant \frac{\lambda}{k^2}L(\gamma) - \frac{4}{k^2}\arctan\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\tan\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{4}L(\gamma)\right)\right). \tag{1}$$

2. Если $\lambda \geqslant k$, то

$$A(\gamma) \geqslant \frac{1}{k}L(\gamma) - \frac{4}{k^2}\arctan\left(\frac{k}{4}L(\gamma)\right). \tag{2}$$

3. Если $k > \lambda > 0$, то

$$A(\gamma) \geqslant \frac{\lambda}{k^2}L(\gamma) - \frac{4}{k^2}\arctan\left(\frac{\lambda}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{k^2-\lambda^2}}{4}L(\gamma)\right)\right). \tag{3}$$

И равенство в неравенствах (1)–(3) *достигается только для λ-выпуклой луночки.*

Теорема 1 эквивалентна следующей теореме, выражающей изопериметрическое свойство λ-выпуклой луночки.

Теорема 2. *Пусть $\gamma \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$ — замкнутая вложенная λ-выпуклая кривая. Если $\widetilde{\gamma} \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$ — λ-выпуклая луночка такая, что*

$$L(\gamma) = L(\widetilde{\gamma}),$$

то

$$A(\gamma) \geqslant A(\widetilde{\gamma}),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда γ конгруэнтна $\widetilde{\gamma}$.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства мы воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Будем следовать [7, § 1.4].

Чтобы применить принцип максимума Понтрягина, нам необходимо построить управляемую систему. Для этого рассмотрим так называемую *опорную функцию кривой.*

А именно, пусть $O \in \mathbb{H}^2(-k^2)$ — точка внутри выпуклой области, ограничиваемой кривой γ. Введем на плоскости $\mathbb{H}^2(-k^2)$ полярную систему координат с началом в точке O с угловым параметром $\theta \in [0, 2\pi]$. Для каждого геодезического луча OL, выходящего из O под углом θ с некоторым фиксированным направлением, рассмотрим перпендикулярную к нему геодезическую, опорную для кривой γ в некоторой точке P (в силу ограничений на кривизну кривой такая геодезическая всегда существует и точка P — единственна). Обозначим $h(\theta)$ расстояние от точки O до этой геодезической, взятое вдоль луча OL, и будем называть $h = h(\theta)$ *опорной функцией* кривой γ. *Контактным радиусом кривизны* кривой γ назовем величину

$$g(\theta) = \frac{1}{k}\tanh(kh(\theta)).$$

Заметим, что функции $h(\theta)$ и $g(\theta)$ принадлежат классу гладкости $C^{1,1}[0, 2\pi]$. Это означает, что у $g(\theta)$ почти всюду существует вторая производная по параметру θ.

Прямым вычислением, аналогичным вычислению в [8], можно показать, что контактный радиус кривизны g связан с *радиусом кривизны* $R(\theta)$, определяемым как $1/k(\theta)$, следующим образом:

$$R = \frac{g'' + g}{\left(1 - \dfrac{k^2 g'^2}{1 - k^2 g^2}\right)^{3/2}} \qquad \text{для п.в.} \qquad \theta \in [0, 2\pi], \tag{4}$$

где штрихом обозначена производная функции по параметру θ.

Для доказательства теоремы 2 зафиксируем длину наших кривых и будем минимизировать площадь выпуклых областей, которые они ограничивают. Чтобы формализовать эту задачу нам понадобятся выражения для длины $L(\gamma)$ кривой γ и площади $A(\gamma)$ области, которую она ограничивает, в терминах контактного радиуса кривизны $g(\theta)$ и радиуса кривизны $R(\theta)$. Не ограничивая общности, везде далее можем считать, что плоскость Лобачевского имеет кривизну -1. Прямые вычисления показывают, что

$$L(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} R \frac{\sqrt{1 - g^2 - g'^2}}{1 - g^2} d\theta, \qquad A(\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{1 - g^2 - g'^2}}{1 - g^2} - 1\right) d\theta. \tag{5}$$

Таким образом, нам нужно минимизировать $A(\gamma)$ при условии $L(\gamma) = \mathrm{const}$ и с учетом (4). Интерпретируем эту задачу как задачу оптимального управления, где $t = \theta$ — время, $u(t) = R(t)$ — управление, $x_1(t) = g(t)$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = g'(\theta)$ — фазовые переменные.

Заметим, что в силу ограничений на кривизну кривой γ

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \frac{1}{\lambda} \qquad \text{п.в. на} \qquad [0, 2\pi]. \tag{6}$$

Тогда, с учетом всех введенных обозначений, переписывая (4), (5) и учитывая (6), приходим к следующей формальной задаче:

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} - 1\right) dt \to \min, \\
\int\limits_0^{2\pi} u \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} dt = \mathrm{const}, \\
\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \left(\dfrac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 - x_1^2}\right)^{3/2} - x_1 \end{cases} \qquad \text{п.в. на } [0, 2\pi], \\
0 \leqslant u(t) \leqslant \frac{1}{\lambda} \qquad \text{п.в. на } [0, 2\pi], \\
x_1(0) = x_1(2\pi), \\
x_2(0) = x_2(2\pi).
\end{gathered} \tag{7}$$

При этом управление $u(t)$ — ограниченная измеримая функция на $[0, 2\pi]$, а так как $g(\theta) \in C^{1,1}[0, 2\pi]$, то фазовая переменная $x(t)$, определяемая как пара $(x_1(t), x_2(t))$, — абсолютно непрерывная на $[0, 2\pi]$ функция. Также все функции, входящие в функционал, интегральное ограничение и управляющую систему, очевидно, непрерывны по совокупности переменных вместе с их производными по x.

Таким образом, пара (x, u) является управляемым процессом (см. [7]), а соответствующая траектория $\{(x(t), u(t))\colon t \in [0, 2\pi]\}$, удовлетворяющая интегральному ограничению и граничным условиям задачи (7), будет допустимой траекторией.

Кроме того, по теореме выбора Бляшке (см. [9]), поставленная задача минимизации площади при фиксированной длине в классе λ-выпуклых кривых, а значит и ее формализация (7), имеет решение. Следовательно, выполнение принципа максимума Понтрягина является критерием оптимальности траектории.

Функция Понтрягина задачи (7) равна

$$\mathcal{H}(x, u, p, \mu_0, \mu_1) = p_1 x_2 + p_2 \left(u \left(\frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 - x_1^2} \right)^{3/2} - x_1 \right) + \mu_1 \left(u \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} \right) - \\ - \mu_0 \left(\frac{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}{1 - x_1^2} - 1 \right).$$

Заметим, что эта функция линейна по управлению u и может быть записана в виде $\mathcal{H} = u\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_j$ не зависят от u.

Тогда из условия максимума функции $\mathcal{H}$ следует, что искомое оптимальное управление в задаче (7) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} & \text{при} \quad \mathcal{H}_1 > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \mathcal{H}_1 < 0, \\ \text{не определено} & \text{при} \quad \mathcal{H}_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{п.в. на } [0, 2\pi]. \tag{8}$$

Окончательный вид управления (8) определяется путем анализа так называемой *особой экстремали*, т. е. допустимой в задаче траектории, вдоль которой $\mathcal{H}_1$ тождественно равно нулю. Аналогично [3] можно показать, что на особой экстремале задачи (7) не выполнено необходимое условие Лежандра–Клебша вхождения дуг таких траекторий в решение (см. [10]). А значит, оптимальное управление на отрезке $[0, 2\pi]$ принимает только значения 0 или $1/\lambda$.

С геометрической точки зрения это означает, что оптимальная кривая должна состоять из дуг кривых постоянной геодезической кривизны, равной λ. Таким образом, решение задачи (7) лежит в классе λ-выпуклых многоугольников, причем с возможным бесконечным количеством вершин, т. е. точек, в которых правая и левая полукасательные к кривой не совпадают. Но для такого класса кривых имеет место следующее геометрическое утверждение, доказательство которого аналогично случаю сферы (см. [3]).

Утверждение 1. *Пусть γ и $\widetilde{\gamma}$ — λ-выпуклые многоугольник и луночка на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2(-k^2)$. Если $L(\gamma) = L(\widetilde{\gamma})$, то*

$$A(\gamma) \geqslant A(\widetilde{\gamma}),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда γ и $\widetilde{\gamma}$ — конгруэнтны.

Из утверждения 1 и следует теорема 2.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2 и связи длины λ-выпуклой луночки и площади области, которую она ограничивает.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. А. А. Борисенко за постановку задачи и за многочисленные полезные обсуждения.

1. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. – Ленинград: Наука, 1980. – 288 с.
2. *Борисенко А. А., Драч К. Д.* Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной // Матем. заметки. – 2014. – **95**, вып. 5. – С. 656–665.
3. *Borisenko A. A., Drach K. D.* Extreme properties of curves with bounded curvature on a sphere // J. Dynam. and Control Syst. – 2014. – doi:10.1007/s10883-014-9221-z.
4. *Борисенко А. А., Драч К. Д.* О сферичности гиперповерхностей с ограниченной снизу нормальной кривизной // Мат. сб. – 2013. – **204**, № 11. – С. 21–40.
5. *Howard R., Treibergs A.* A reverse isoperimetric inequality, stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature // Rocky Mountain J. Math. – 1995. – **25**, No 2. – P. 635–684.
6. *Милка А. Д.* Оценка размеров кривых ограниченной кривизны // Укр. геом. сб. – 1978. – **21**. – С. 88–91.
7. *Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П.* Принцип максимума в оптимальном управлении. – Москва: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2004. – 168 с.
8. *Fillmore J. P.* Barbier's theorem in the Lobachevski plane // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – **24**. – P. 705–709.
9. *Бляшке В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
10. *Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.* Singular extremals // Topics in Optimization / Ed. G. Leitmann. – New York: Academ. Press, 1967. – P. 63–103.

Сумской государственный университет
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 28.04.2014

К. Д. Драч

Про ізопериметричну властивість λ-опуклих луночок на площині Лобачевського

Знайдено точну нижню оцінку площі області, що може бути обмежена замкненою вкладеною λ-опуклою кривою заданої довжини, яка лежить на площині Лобачевського.

K. D. Drach

About the isoperimetric property of λ-convex lunes on the Lobachevsky plane

We give a sharp lower bound of the area of a domain that can be enclosed by a closed embedded λ-convex curve of a given length on the Lobachevsky plane.